

VERGLEICH DER
ISLESSCHEN NORMALFUNKTIONEN F^{β}
MIT DEN
FEFERMAN-ACZELSCHEN NORMALFUNKTIONEN $\theta\alpha$

Heidemarie Aly

1976

VERGLEICH DER
ISLESSCHEN NORMALFUNKTIONEN F^β
MIT DEN
FEFERMAN-ACZELSCHEM NORMALFUNKTIONEN $\theta\alpha$

Inauguraldissertation zur Erlangung des
Doktorgrades der Fakultät für Mathematik
an der Ludwigs-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von
Heidemarie Aly
aus München
im Juli 1976



1.Berichterstatter: Professor Schütte

2.Berichterstatter: Priv.Doiz. Osswald, Wissenschaftl.Rat
u. Professor

Tag der mündlichen Prüfung: 9.Dezember 1976

Inhaltsverzeichnis

i	Einleitung
i	I Die Bedeutung der Ordinalzahlbezeichnungssysteme innerhalb der mathematischen Grundlagenforschung
ii	II Die Problemstellung dieser Arbeit
1	§1 Die Grundlagen von BACHMANN
5	§2 Die Normalfunktionen F^B
12	§3 Die Normalfunktionen θ_α
15	§4 Hilfsdefinitionen und -Sätze
15	I zum ISLESSchen Bezeichnungssystem
17	II zum FEFERMAN-ACZELschen Bezeichnungssystem
19	III gemischte Sätze
24	§5 Die ACZELsche Vermutung
35	Literaturverzeichnis
36	Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

I Die Bedeutung der Ordinalzahlbezeichnungssysteme innerhalb der mathematischen Grundlagenforschung

Um die Jahrhundertwende erschütterten die Antinomien das Vertrauen in die mathematischen Begriffsbildungen und Schlußweisen: Einerseits ließen sich mit mathematischen Methoden Widersprüche herleiten, andererseits wollte man auf diese mathematischen Methoden nicht verzichten, da sie zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten haben (z.B. in der Physik). Als kritisch stellten sich die imprädikativen Begriffsbildungen und die Verwendung des "Tertium non datur" heraus. Es gab verschiedene Ansätze die Begriffsbildungen oder die Schlußweisen einzuschränken (z.B. die Typentheorie von RUSSELL, den Intuitionismus, die typenfreie Logik von ACKERMANN), aber keine dieser Theorien konnte alle Ergebnisse der klassischen Mathematik herleiten.

HILBERT wollte aber die gesamte klassische Mathematik retten, indem er ihre formale Struktur in einer widerspruchsfreien Theorie darstellen und auf eine inhaltliche Interpretation verzichten wollte. Innerhalb so einer Theorie sollten die Schlußweisen der klassischen Mathematik uneingeschränkt gelten, dafür sollte der Nachweis, daß die Theorie widerspruchsfrei ist, nur mit unumstrittenen ("finiten") Beweismethoden geführt werden. Der Begriff "finit" war nicht genau definiert, aber ursprünglich nahm man an, daß sich alle diese Methoden in der reinen Zahlentheorie formalisieren lassen. Durch die Ergebnisse von GÖDEL wissen wir, daß die Widerspruchsfreiheit einer Theorie, die die Zahlentheorie umfaßt, nicht mit den Methoden dieser Theorie bewiesen werden kann.

GENTZEN wies darauf hin, daß es auch andere "unumstrit-

tene" Beweismethoden gibt, nämlich die transfinite Induktion über einen konstruktiv definierten Ordinalzahlabschnitt. Der Beweisgedanke ist folgender:

Man führt beliebige Herleitungen durch Reduktionsschritte in äquivalente "einfachere" Herleitungen über (kritisch ist dabei die Reduktion der vollständigen Induktion und des Schnittes). Dann ordnet man jeder Herleitung eine Ordinalzahl so zu, daß die reduzierte Herleitung eine kleinere Ordinalzahl erhält als die ursprüngliche Herleitung (kann man in einem System die vollständige Induktion formalisieren, so benötigt man transfinite Ordinalzahlen). Da jede echt absteigende Ordinalzahlfolge endlich ist, bricht das Reduktionsverfahren ab, und man erhält eine Herleitung in "Normalform". Dann gibt man eine Formel an, die kein Axiom ist und nicht durch eine "normale" Herleitung abgeleitet werden kann, d.h. daß sie mit keiner Herleitung bewiesen werden kann: das System ist also syntaktisch widerspruchsfrei.

So führte GENTZEN den Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie mit einer transfiniten Induktion bis ϵ_0 ; und so versucht man heute die Widerspruchsfreiheit immer größerer Teilsysteme der klassischen Analysis zu zeigen, wozu man immer größere Ordinalzahlbezeichnungssysteme benötigt.

II Die Problemstellung dieser Arbeit

Hier werden zwei Ordinalzahlbezeichnungssysteme vorgestellt und verglichen. Schlagwortartig kann man das System von ISLES als "analytisch" (zerlegend) charakterisieren, und das von FEFERMAN als "synthetisch" (aufbauend).

Das System von ISLES ist eine Verallgemeinerung eines Verfahrens von BACHMANN: ISLES betrachtet einen Ordinalzahlabschnitt bis $\aleph_0$ - der ersten starkkritischen Zahl der Ordnungsfunktion g aller Kardinalzahlen $\geq \omega$ - und

überlegt, wieweit er eine Zahl γ dieses Abschnittes in kleinere Ordinalzahlen zerlegen kann. Hierfür definiert er eine Hierarchie von Normalfunktionen F^{β}_{δ} mit Hilfe von Hauptfolgen, die er in m Schritten soweit wie möglich "kürzt". Im ersten Schritt ordnet er jeder Ordinalzahl γ Teile $P(q_1, \gamma)$ und einen Typ $T(q_1, \gamma)$ zu, wobei gilt $P(q_1, \gamma) \cup \{T(q_1, \gamma)\} \leq \gamma < q_1^+$ und q_1^+ ist die kleinste Kardinalzahl größer als γ ; und er definiert F^{β}_{δ} für gewisse δ . Seien nun q_n , $P(q_n, \gamma)$, $T(q_n, \gamma)$ und $F^{q_n}_{\delta}$ schon definiert, mit $P(q_n, \gamma) \cup \{T(q_n, \gamma)\} < q_n^+$, so prüft er, ob sich jedes Element aus $P(q_n, \gamma)$ durch Zahlen kleiner-gleich q_n mit Hilfe von $+$, $\cdot$ und $F^{\beta}_{\delta} \upharpoonright \gamma \times \Lambda_0$ darstellen läßt. Gilt das, so konstruiert er neue q_{n+1} , $P(q_{n+1}, \gamma)$, $T(q_{n+1}, \gamma)$, $F^{q_{n+1}}_{\delta}$ mit $P(q_{n+1}, \gamma) \cup \{T(q_{n+1}, \gamma)\} < q_{n+1}^+ \leq q_n$; gilt das nicht, so bricht er das Verfahren ab und ordnet γ eine Normalform zu. Er stellt fest, daß er alle Ordinalzahlen kleiner $F^{\omega}(\Lambda_0)_0$ soweit zerlegen kann, daß in ihrer Normalform nur noch $0, +, \cdot, F, g$ auftreten.

Aus beweistechnischen Gründen haben wir die Definitionen von ISLES so abgeändert, daß der Definitionsbereich aller Normalfunktionen um die "0" erweitert wird. Einige Definitionen wurden durch einfachere und schwächere Definitionen ersetzt, die für die Beweisführung ausreichen.

Das System von FEFERMAN wurde von ACZEL verallgemeinert und definiert ebenfalls eine Hierarchie von Normalfunktionen $\theta\alpha$. Dabei ist $\theta\alpha$ die Ordnungsfunktion der Ordinalzahlen β , die sich nicht durch kleinere Ordinalzahlen mit Hilfe von $+$, g und $\theta \upharpoonright \alpha \times ON$ darstellen lassen. Das mit diesen Normalfunktionen definierte Bezeichnungssystem reicht bis $\theta(\Lambda_0)_0$: Alle kleineren Ordinalzahlen γ lassen sich aus der "0" mit Hilfe von $+$, g und θ zusammensetzen.

ACZEL vermutete, daß die beiden Systeme gleichstark sind, und er gab die Beziehung zwischen $\theta\alpha$ und F^{β}_{α} an. BRIDGE bestätigte diese Vermutung, aber leider ist ihre Beweisführung nicht sehr sorgfältig. Die vorliegende Arbeit

führt den Beweis nochmals durch. Viele Beweisgedanken bleiben dabei erhalten; der Unterschied liegt im Detail: Die Aussagen müssen teils verallgemeinert, teils eingeschränkt werden, damit die entsprechenden Induktionen durchgeführt werden können. Auch einige von BRIDGE benutzte, aber überhaupt nicht definierte Aussagen werden durch veränderte Beweisführung umgangen. Der Beweis kann sich auch auf die Arbeiten von BUCHHOLZ und OELLRICH stützen; BUCHHOLZ hat viele Eigenschaften des FEFERMAN-ACZELschen Systems bewiesen.

Ich danke Herrn Prof.Dr.K. Schütte für die Anregungen zu dieser Arbeit.

§1 Die Grundlagen von BACHMANN

In BACHMANN [2] wird für jede Limeszahl $\gamma < \varphi_{\Omega}(1) + 1$ (1) eine ausgezeichnete Hauptfolge $\{\gamma_n\}$ vom Typus ω definiert mit $\gamma = \lim\{\gamma_n \mid n < \omega\}$. Dafür werden Sätze über Normalfunktionen benötigt, die wir ohne Beweise zitieren. Außerdem gibt BACHMANN Bedingungen an, unter denen man das Verfahren verallgemeinern kann: Die Limeszahlen müssen Elemente einer BACHMANN-Menge sein. Wir zitieren die Definition der BACHMANN-Menge und einige dazugehörige Sätze über Hierarchien von Normalfunktionen nach OELLRICH [10]. Als Beispiel einer Hierarchie geben wir die 2-stellige Funktion g an (siehe BUCHHOLZ [6]).

Wir legen eine axiomatische Mengenlehre mit Auswahlaxiom zu Grunde.

1.1. Definition:

a) ON sei die Klasse aller Ordinalzahlen. Für jede Ordinalzahl $\alpha \in \text{ON}$ gilt $\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\}$. Die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi, \tau$ (auch mit Indizes) bezeichnen im folgenden immer Ordinalzahlen; i, n, m (auch mit Indizes) bezeichnen Ordinalzahlen $< \omega$ und M (auch mit Indizes) bezeichnet Ordinalzahlklassen.

b) Eine Funktion f heißt Normalfunktion in M , wenn gilt:

- (i) Df ist ein Ordinalzahlabschnitt,
- (ii) $\alpha \in Df \Rightarrow f\alpha \in M$,
- (iii) $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \alpha_2 \in Df \Rightarrow f\alpha_1 < f\alpha_2$,
- (iv) $\lim(\alpha) \wedge \alpha \in Df \Rightarrow f\alpha = \sup \text{ in } M \{f\xi \mid \xi < \alpha\}$.

c) Eine Funktion f heißt Normalfunktion auf δ , wenn gilt:

- (i) f ist Normalfunktion in δ ,
- (ii) $Df = \delta$.

d) Eine Funktion f heißt Normalfunktion, wenn f

Normalfunktion in ON ist oder es gibt eine Ordinalzahl δ , so daß f Normalfunktion auf δ ist.

Die Buchstaben f, g, h (auch mit Indizes) bezeichnen im folgenden immer Funktionen.

e) Sei f Normalfunktion, dann sei $f^0 := \text{id}$ und $f^{n+1} := f \circ f^n$.

f) α, τ seien Limeszahlen. h heißt Hauptfolge für α in M vom Typ τ , wenn gilt:

- (i) h ist Normalfunktion in M ;
- (ii) $\tau \in \text{Dh} \wedge \alpha \in M$;
- (iii) $h(\tau) = \alpha$.

g) Eine Limeszahl α heißt regulär, wenn für jede Hauptfolge für α in $\alpha+1$ vom Typ τ gilt $\tau = \alpha$.

f) K sei der topologische Abschluß aller regulären Ordinalzahlen $> \omega$; $K_0 := K \cup \{0\}$; $K_\omega := K \cup \{\omega\}$.

1.2. Satz:

α, τ seien Limeszahlen. Sei h eine Hauptfolge für α in M_1 vom Typ τ , f sei Normalfunktion in M_2 und $M_1 \subset \text{Df}$, dann ist $f \circ h$ eine Hauptfolge für $f\alpha$ in M_2 vom Typ τ .

1.3. Satz:

Sei f Normalfunktion auf δ , $\delta > \omega$ und δ regulär, dann bildet $\{\xi \mid f\xi = \xi\}$ den Wertebereich einer Normalfunktion f' auf δ und es gilt:

- (i) $\lambda f^n 0$ ist Hauptfolge für $f'0$ in δ vom Typ ω ;
- (ii) $\lambda f^n (f'\beta + 1)$ ist Hauptfolge für $f'(\beta + 1)$ in δ vom Typ ω .

1.4. Satz:

Es seien δ_1, δ Limeszahlen, $\delta_1 < \delta$, δ regulär und $\omega < \delta$.

$\{f\alpha \mid \alpha < \delta_1\}$ sei eine Folge von Normalfunktionen auf δ

mit $Wf\alpha_2 < W(f\alpha_1)'$ für $\alpha_1 < \alpha_2 < \delta_1$. Dann gilt

$\cap \{Wf\alpha \mid \alpha < \delta_1\}$ ist Wertebereich einer Normalfunktion $f\delta_1$ auf δ .

Sei h eine Hauptfolge für δ_1 in δ vom Typ τ , dann gilt:

- (i) $\lambda \xi f(h\xi)0$ ist Hauptfolge für $f\delta_1 0$ in δ vom Typ τ ;
- (ii) $\lambda \xi f(h\xi)(f\delta_1(\beta+1))$ ist Hauptfolge für $f\delta_1(\beta+1)$ in δ vom Typ τ .

1.5. Satz:

Sei $\{f\alpha \mid \alpha < \delta\}$ eine Folge von Normalfunktionen auf δ , δ regulär und $\omega < \delta$, $0 < f00$ und für $\alpha_2 < \delta$ gelte

- (i) $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow Wf\alpha_2 \subset W(f\alpha_1)'$;
 - (ii) $\lim(\alpha_2) \Rightarrow Wf\alpha_2 = \bigcap \{Wf\alpha_1 \mid \alpha_1 < \alpha_2\}$;
- so ist $\{f\alpha \mid \alpha < \delta\}$ der Wertebereich einer Normalfunktion $f\delta$ auf δ .

1.6. Definition:

- a) $g\alpha$ sei die Ordnungsfunktion von K_ω ;
- b) Für $0 < \alpha$ sei $g\alpha$ die Ordnungsfunktion von $\{\eta \mid \forall \xi (\xi < \alpha \Rightarrow \eta \in Dg\xi \wedge g\xi\eta = \eta)\}$.
- c) $\wedge$ sei die Ordnungsfunktion von $\{\xi \mid g\xi 0 = \xi\}$.
- d) $\alpha^+ := \min\{\xi \mid \xi \in K \wedge \alpha < \xi\}$.
- e) $S\alpha := \min\{\xi \mid \xi \in K_\omega \wedge \alpha < \xi^+\}$.
- f) $s\alpha := \min\{\xi \mid \xi \in K_\omega \wedge \alpha < \xi^+\}$.

1.7. Folgerungen:

- a) $g\alpha$ und $\wedge$ sind Normalfunktionen auf ON.
- b) $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow g\alpha_1\beta \leq g\alpha_2\beta \wedge (\beta \notin K \Rightarrow g\alpha_1\beta < g\alpha_2\beta)$.
- c) $\alpha, \beta \in g\alpha\beta \wedge (0 < \beta \Rightarrow \alpha < g\alpha\beta) \wedge (\beta \notin K \Rightarrow \beta < g\alpha\beta)$.
- d) $g\alpha_1\beta_1 \leq g\alpha_2\beta_2$ gilt genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:
 - (i) $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \beta_1 \leq g\alpha_2\beta_2$;
 - (ii) $\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 \leq \beta_2$;
 - (iii) $\alpha_2 < \alpha_1 \wedge g\alpha_1\beta_1 \leq \beta_2$.
- e) $\alpha < \wedge 0 \wedge \beta < \wedge 0 \Rightarrow g\alpha\beta < \wedge 0$.
- f) $\alpha < \wedge 0 \wedge \alpha \in Wg0 \Rightarrow \exists \xi \exists \eta (\xi < \alpha \wedge \eta < \alpha \wedge \alpha = g\xi\eta)$.
- g) $S\alpha \leq \alpha < \alpha^+ \wedge (\omega \leq \alpha \Rightarrow s\alpha \leq \alpha)$.
- h) $\forall \xi \exists \eta (\xi^+ = g0(\eta+1))$.

1.8. Definition:

Sei $\beta \in K_\omega$. Eine Ordinalzahlmenge $\mathcal{L}(\beta)$ heißt BACHMANN-Menge vom Typ β , wenn für $\gamma \in \mathcal{L}(\beta)$ gilt:

(B1) $\gamma = 0 \Rightarrow \gamma \in \mathcal{L}(\beta)$;

(B2) $\gamma \in \mathcal{L}(\beta) \Leftrightarrow \gamma+1 \in \mathcal{L}(\beta)$;

(B3) gilt $\lim(\gamma)$, so gibt es eine Funktion h_γ und eine Limeszahl τ_γ mit

a) $\tau_\gamma \leq \beta$;

b) h_γ ist Hauptfolge für γ in $\mathcal{L}(\beta)$ vom Typ τ_γ ;

Sei jetzt $\eta < \tau_\gamma$:

c) $\text{suc}(h_\gamma(\eta+1)) \Rightarrow h_\gamma(\eta+1) = h_\gamma\eta+1$;

d) $\lim(\eta) \Rightarrow \lim(h_\gamma\eta) \wedge h_\gamma \upharpoonright (\eta+1)$ ist Hauptfolge für $h_\gamma\eta$ in $\mathcal{L}(\beta)$ vom Typ η ;

e) $\gamma_1 \in \mathcal{L}(\beta) \wedge \lim(\gamma_1) \wedge h_\gamma\eta < \gamma_1 \leq h_\gamma(\eta+1) \Rightarrow h_\gamma\eta \leq h_{\gamma_1}0$.

Bemerkung: Wenn h_γ Hauptfolge für γ in $\mathcal{L}(\beta)$ vom Typ τ_γ ist, so schreiben wir $\text{Th}_\gamma = \tau_\gamma$.

1.9. Satz:

Sei f Normalfunktion mit regulärem Fixpunkt δ , $\omega < \delta$, $0 < f0$; $\mathcal{L}(\delta)$ sei BACHMANN-Menge. Dann gibt es eine Folge von Normalfunktionen $\{f_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}(\delta)\}$, für die gilt:

a) $\text{Df}_\gamma = \delta$;

b) $f0 = f \upharpoonright \delta$;

c) $f(\gamma+1) = (f_\gamma)'$;

Sei jetzt $\lim(\gamma)$ und $\text{Th}_\gamma = \tau_\gamma$:

d) $\tau_\gamma < \delta \Rightarrow \text{Wf}_\gamma = \bigcap \{ \text{Wf}(h_\gamma\eta) \mid \eta < \tau_\gamma \}$;

e) $\tau_\gamma = \delta \Rightarrow \text{Wf}_\gamma = \{ \eta, \eta < \tau_\gamma \wedge \eta = f(h_\gamma\eta)0 \}$;

f) $\gamma_1 \in \mathcal{L}(\delta) \wedge h_\gamma\eta < \gamma_1 \leq h_\gamma(\eta+1) \Rightarrow \text{Wf}_{\gamma_1} \subset \text{W}(f(h_\gamma\eta))'$.

1.10. Satz:

$f, \delta, \mathcal{L}(\delta), \{f_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}(\delta)\}$ wie in 1.9.. Sei $\alpha \in \mathcal{L}(\delta)$ und $\gamma \in \text{Wf}0$. Dann gibt es ein maximales $\xi < \alpha$ mit $\xi \in \mathcal{L}(\delta)$ und $\gamma \in \text{Wf}\xi$; d.h. es gibt η mit $\gamma = f\xi\eta$. Ist zusätzlich $\gamma < f(\alpha+1)0$, so ist $\eta < \alpha$.

§2 Die Normalfunktionen F^β

In diesem Paragraphen stellen wir die Hierarchie der Normalfunktionen F^β vor. ISLES hat sie definiert, um mit ihrer Hilfe ein Ordinalzahlbezeichnungssystem aufzustellen bis zur Grenzzahl $F^\omega(\aleph_0)0$. OELLRICH hat gezeigt, daß die sehr komplizierten Definitionen von ISLES sinnvoll sind.

Wir bringen hier vereinfachte Definitionen und einige Folgerungen. Die Beweise dieser Sätze und der meisten Äquivalenzen dieser Definitionen mit den Definitionen von ISLES findet man bei OELLRICH, die anderen Äquivalenzen sind offensichtlich.

2.1. Definition:

- a) $M < \alpha: \Leftrightarrow \forall \xi (\xi \in M \Rightarrow \xi < \alpha)$;
- b) $\alpha < M: \Leftrightarrow \exists \xi (\xi \in M \wedge \alpha < \xi)$;
- c) $M \leq \alpha: \Leftrightarrow \forall \xi (\xi \in M \Rightarrow \xi \leq \alpha)$;
- d) $\alpha \leq M: \Leftrightarrow \exists \xi (\xi \in M \wedge \alpha \leq \xi)$;
- e) $M_1 < M_2: \Leftrightarrow \exists \eta \forall \xi (\eta \in M_2 \wedge (\xi \in M_1 \Rightarrow \xi < \eta))$;
- f) $M_1 \leq M_2: \Leftrightarrow \forall \xi \exists \eta (\xi \in M_1 \wedge \eta \in M_2 \wedge \xi \leq \eta)$.

2.2. Definition:

Es sei $B \in K_\omega$. Eine BACHMANN-Menge $\mathcal{L}(B)$ heißt BACHMANN-System, wenn jedem Element γ aus $\mathcal{L}(B)$ eine Ordinalzahlmenge $P(\gamma)$ - die "Teile" - und eine Ordinalzahl $D(\gamma)$ - der "ausgezeichnete Teil" - zugeordnet sind mit folgenden Eigenschaften:

- (P1) $P(\gamma) \subset \mathcal{L}(B) \wedge P(\gamma) \leq \gamma \wedge P(\gamma) \leq B \wedge$
 $\wedge P(\gamma) \subset \{\xi \mid \xi > \omega \Rightarrow \xi \text{ nicht regulär}\}$;
- (P2) $D(\gamma) \in P(\gamma)$;
- (P3) Für $M \subset \mathcal{L}(B)$ setzen wir $P(M) := \bigcup \{P(\xi) \mid \xi \in M\}$, dann gilt $P(P(\gamma)) = P(\gamma) \wedge D(D(\gamma)) = D(\gamma)$;
- (P4) $P(\gamma) = P(h\gamma 0) \cup \{D(\gamma)\}$;
- (P5) $\eta < \tau_\gamma = Th\gamma \wedge \lim(\gamma) \Rightarrow P(h\gamma(\eta+n)) \subset P(h\gamma\eta) \cup \{1\}$;

Anmerkung: In ISLES [9] werden BACHMANNsche Bezeichnungssysteme definiert; das sind in unserer Sprache BACHMANN-Systeme, für die zu jedem Element γ zusätzlich nichtausgezeichnete Teile $ND(\gamma)$ definiert werden. In der folgenden Arbeit benötigen wir keine Aussagen über nichtausgezeichnete Teile und verzichten deshalb auf ihre Definition. Aus der Arbeit von CELLRICH [10] folgt unmittelbar, daß auch die im folgenden definierten Systeme die Eigenschaften (P1)-(P5) haben.

2.3. Definition des BACHMANN-Systems $\mathcal{B}(\Lambda_0)$:

a) $\gamma \in \mathcal{B}(\Lambda_0) : \Leftrightarrow \gamma \leq \Lambda_0$;

Für jedes Element γ definieren wir Teile $P'(\gamma)$ mit ausgezeichnetem Teil $D'(\gamma)$; ist γ eine Limeszahl, so definieren wir eine Hauptfolge $h'(\gamma)$ vom Typ $T'(\gamma)$:

b) $\gamma = 0$: $P'(\gamma) := \{D'(\gamma)\} := \{0\}$;

c) $\gamma = \eta + 1$: $P'(\gamma) := P'(\eta) \cup \{1\} \wedge D'(\gamma) := 1$;

d) $\lim(\gamma) \wedge \gamma \notin Wgo \Rightarrow \gamma = s\gamma + \eta$: $h'(\gamma) := \lambda\delta(s\gamma + \delta) \wedge T'(\gamma) := \eta \wedge P'(\gamma) := P'(s\gamma) \cup \{\gamma\} \wedge D'(\gamma) := \gamma$;

e) $\lim(\gamma) \wedge \gamma \in Wgo \wedge \gamma < \Lambda_0$: Nach 1.7.f gibt es $\{\xi, \eta\} < \gamma$ mit $\gamma = g\xi\eta$: $P'(\gamma) := P'(\xi) \cup P'(\eta) \cup \{\omega\}$;

Fallunterscheidung:

e1) $\xi = 0 \wedge \eta = 0$: $h'(\gamma) := id \wedge T'(\gamma) := D'(\gamma) := \omega$;

e2) $\xi = 0 \wedge \eta = \eta_1 + 1$: $h'(\gamma) := \lambda\delta(g\eta_1 + \delta) \wedge T'(\gamma) := \gamma \wedge D'(\gamma) := \omega$;

e3) $\lim(\eta)$: $h'(\gamma) := g\xi \circ h'(\eta) \wedge T'(\gamma) := T'(\eta) \wedge D'(\gamma) := D'(\eta)$;

e4) $\xi = \xi_1 + 1 \wedge \lim(\eta)$: $h'(\gamma) := h$ mit

$h_0 := \begin{cases} g\xi_1 0 & \text{wenn } \eta = 0 \\ g\xi_1 (g\xi\eta_1 + 1) & \text{wenn } \eta = \eta_1 + 1 \end{cases}$

$h(n+1) := g\xi_1(hn) \wedge T'(\gamma) := D'(\gamma) := \omega$;

e5) $\lim(\xi) \wedge \lim(\eta)$: $T'(\gamma) := T'(\xi) \wedge D'(\gamma) := D'(\xi)$

$h'(\gamma) := \begin{cases} \lambda\delta g(h'(\xi)\delta) 0 & \text{wenn } \eta = 0 \\ \lambda\delta g(h'(\xi)\delta)(g\xi\eta_1 + 1) & \text{wenn } \eta = \eta_1 + 1 \end{cases}$

f) $\gamma = \Lambda_0$: $P'(\gamma) := \{0, 1, \omega\} \wedge D'(\gamma) := \omega \wedge h'(\gamma) 0 := g00 \wedge h'(\gamma)(n+1) := g(h'(\gamma)n) 0 \wedge T'(\gamma) := \omega$.

Anmerkung: OELLRICH hat gezeigt, daß für jedes $\beta \in K_\omega$ mit $\beta < \aleph_0$ die Beschränkung von $\mathfrak{L}(\aleph_0)$ auf alle Elemente $\leq \beta^+$ ebenfalls ein BACHMANN-System ist.

Im folgenden definieren wir für jedes $\beta \in K_\omega$ mit $\beta < \aleph_0$ ein BACHMANN-System $B(\beta)$. Gilt $\gamma \in B(\beta)$, so definieren wir simultan die Normalfunktion F^β_γ , eine Ordinalzahlmenge $B(\gamma, \beta)$ und die beiden BACHMANN-Systeme $B'(\gamma, \beta)$ und $B''(\gamma, \beta)$.

Das BACHMANN-System $B(\beta)$ enthält Ordinalzahlen $\leq \aleph_0$ und Typen $\leq \beta^+$. Die Hauptfolge, der Typ, die Teile und der ausgezeichnete Teil eines Elementes $\gamma \in B(\beta)$ werden mit $h(\beta, \gamma)$, $T(\beta, \gamma)$, $P(\beta, \gamma)$, $D(\beta, \gamma)$ bezeichnet.

Die beiden BACHMANN-Systeme $B'(\gamma, \beta)$ und $B''(\gamma, \beta)$ enthalten die gleichen Ordinalzahlen wie $B(\gamma, \beta)$. Sie sind $< \beta^+$ und haben Typen $\leq \beta$. In Spezialfällen ist $B(\gamma, \beta)$ - und damit auch $B'(\gamma, \beta)$ und $B''(\gamma, \beta)$ - ein Ordinalzahlabschnitt kleiner $\gamma+1$ oder kleiner $F^\beta_{\gamma+1} 0$.

Sei $\alpha \in B(\gamma, \beta)$, dann ist in beiden BACHMANN-Systemen die Definition der Hauptfolgen, Typen und Teile unabhängig von γ . In $B'(\gamma, \beta)$ bezeichnen wir sie mit $h'(\beta, \alpha)$, $T'(\beta, \alpha)$, $P'(\beta, \alpha)$, $D'(\beta, \alpha)$; entsprechend in $B''(\gamma, \beta)$ mit $h''(\beta, \alpha)$, $T''(\beta, \alpha)$, $P''(\beta, \alpha)$ und $D''(\beta, \alpha)$.

Hinter den schwierigen simultanen Definitionen

2.4. - 2.9. steht folgender Gedanke:

Man möchte einer Ordinalzahl $\gamma \leq \aleph_0$ eine Hauptfolge von möglichst kleinem Typ zuordnen. (Ist $\gamma \notin K_\omega$, so sollen alle Folgenglieder in derselben Zahlenklasse wie γ liegen.)

Dazu "zerlegt" man γ in m Schritten. Beim i -ten Schritt läßt sich γ durch Ordinalzahlen aus $P(q_i, \gamma)$ (sie sind kleiner q_i^+) mit Hilfe von Addition, Multiplikation, g und F darstellen und ist γ Limeszahl, so hat die Hauptfolge $h(q_i, \gamma)$ einen Typ $T(q_i, \gamma) \leq q_i^+$. Beim ersten Schritt ist die "Zerlegung" und die Zu-

ordnung von Hauptfolgen wie in $\mathcal{L}(\lambda_0)$. Beim $i+1$ -ten Schritt überprüft man mit $B(\beta)$, ob die Zahl γ weiterzerlegt werden soll ($P(q_i, \gamma) \subset B(\gamma, q_i)$?) und welche Ordinalzahlen aus $P(q_i, \gamma)$ in diesem Schritt bearbeitet werden sollen (Alle Ordinalzahlen der größten noch vorkommenden Zahlenklasse).

$\mathcal{L}(\lambda_0)$ "zerlegt" die Zahlen aus K_ω und ordnet ihnen Hauptfolgen zu. $B'(\gamma, \beta)$ "zerlegt" diejenigen Ordinalzahlen zwischen β und β^+ , für die überhaupt eine "Zerlegung" möglich ist und ordnet ihnen ebenfalls Hauptfolgen zu. $B''(\gamma, \beta)$ ersetzt die Ordinalzahlen, die $B(\beta)$ für die weitere Bearbeitung ausgewählt hat, durch ihre "Zerlegung" und kürzt - wenn möglich - die Hauptfolge.

2.4. - 2.9. Simultane induktive Definitionen

2.4. Definition der BACHMANN-Systeme $B(\beta)$ für $\beta \in K_\omega \uparrow \lambda_0$:

a) $\gamma = 0: \gamma \in B(\beta) \wedge P(\beta, \gamma) := \{0\} \wedge D(\beta, \gamma) := 0$;

b) $\gamma = \gamma_1 + 1 \wedge \gamma_1 \in B(\beta) \Rightarrow \gamma \in B(\beta) \wedge P(\beta, \gamma) := P(\beta, \gamma_1) \cup \{1\} \wedge D(\beta, \gamma) := 1$;

c) $\lim(\gamma)$: Induktive Definition einer natürlichen Zahl n und einer absteigenden Folge $\Sigma(\gamma) := \langle q_1, \dots, q_n \rangle$ mit $q_i \in K_\omega$:

c1) $q_1 := \begin{cases} \omega & \text{für } \gamma = \lambda_0 \\ s\gamma & \text{für } \gamma < \lambda_0 \end{cases}$

Sei $q_1 \leq \beta \Rightarrow \gamma \in B(\beta) \wedge h(\beta, \gamma) := h'(\gamma) \wedge T(\beta, \gamma) := T'(\gamma) \wedge P(\beta, \gamma) := P'(\gamma) \wedge D(\beta, \gamma) := D'(\gamma)$;

c2) $q_1, \dots, q_i$ seien definiert, $q_i > \omega$ und

$P(q_i, \gamma) \subset B(\gamma, q_i)$: Dann sind $P''(q_i, \gamma)$ und $T''(q_i, \gamma)$ definiert;

$q_{i+1} := \min\{\xi \mid \xi \in K_\omega \wedge P''(q_i, \gamma) \cup \{T''(q_i, \gamma)\} \leq \xi^+\}$.

Sei $q_{i+1} \leq \beta < q_i \Rightarrow \gamma \in B(\beta) \wedge h(\beta, \gamma) := h''(q_i, \gamma) \wedge T(\beta, \gamma) := T''(q_i, \gamma) \wedge P(\beta, \gamma) := P''(q_i, \gamma) \wedge D(\beta, \gamma) := D''(q_i, \gamma)$;

c3) $q_1, \dots, q_i$ seien definiert, $q_i = \omega$ oder

$P(q_1, \gamma) \notin B(\gamma, q_1)$, dann gilt $n := i$;

Bemerkung: OELLRICH hat gezeigt, daß die Folge $q_1, \dots, q_n$ echt absteigend ist und daß für jedes $\gamma < \Lambda_0$ die Beschränkung von $B(\beta)$ auf alle Elemente $\leq \gamma$ ebenfalls ein BACHMANN-System ist.

2.5. Definition der Funktionen F^β_γ für $\gamma \in B(\beta)$:

$F^\beta := \lambda \xi \beta^\xi$ ist Normalfunktion mit regulärem Fixpunkt β^+ , $0 < F^\beta 0$, $B(\beta)$ ist ein BACHMANN-System. Dann gibt es nach 1.9. eine Folge von Normalfunktionen

$\{F^\beta_\gamma \mid \gamma \in B(\beta)\}$ und es gilt:

a) $F^\beta 0 = F^\beta \upharpoonright \beta^+$;

b) $F^\beta(\gamma+1) := (F^\beta_\gamma)'$;

c) $\lim(\gamma) \wedge T(\beta, \gamma) < \beta^+$:

$$WF^\beta_\gamma = \bigcap \{WF^\beta(h(\beta, \gamma)\delta) \mid \delta < T(\beta, \gamma)\};$$

d) $\lim(\gamma) \wedge T(\beta, \gamma) = \beta^+$:

$$WF^\beta_\gamma = \{\delta \mid \delta < \beta^+ \wedge \delta = F^\beta(h(\beta, \gamma)\delta)0\}.$$

2.6. Definition der Normalform $NF(\gamma, \beta, \alpha)$ für $\gamma \in B(\beta)$:

a) $\gamma \leq \beta$: $NF(\gamma, \beta, \alpha) := \alpha$;

b) $\beta < \alpha \leq \beta^+ \wedge \alpha \in WF^\beta 0$: Nach 1.10. gibt es ein maximales $\xi \in B(\beta)$ mit $\xi \leq \gamma$ und $\alpha \in WF^\beta \xi$ und es gibt ein dazugehöriges η mit $\alpha = F^\beta_\xi \eta$: $NF(\gamma, \beta, \alpha) := F^\beta_\xi \eta$;

c) $\beta < \alpha \leq \beta^+ \wedge \alpha \notin WF^\beta 0$: Nach BACHMANN [3] gibt es eine eindeutige Polynomdarstellung $\alpha = \sum_{i=1}^m \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i$ mit $\alpha \geq \xi_1 > \dots > \xi_m$ und $1 \leq \eta_i < \beta$; $NF(\gamma, \beta, \alpha) := \sum_{i=1}^m \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i$.

2.7. Definition der Ordinalzahlmenge $B(\gamma, \beta)$ für $\gamma \in B(\beta)$:

a) $\gamma \leq \beta$: $B(\gamma, \beta) := \{\xi \mid \xi \leq \gamma\}$;

b) $\gamma > \beta$: Induktive Definition von $B(\gamma, \beta)$:

b1) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta)$;

b2) $NF(\gamma, \beta, \alpha) = F^\beta_\xi \eta \wedge P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} < \alpha \wedge P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} \subset B(\gamma, \beta) \Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta)$;

b3) $NF(\gamma, \beta, \alpha) = \sum_{i=1}^m \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i \wedge \{\beta^{\xi_i} \mid 1 \leq i \leq m\} \subset B(\gamma, \beta) \Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta)$.

2.8. Definition des BACHMANN-Systems $\underline{B'(\gamma, \beta)}$ für $\gamma \in B(\beta)$:

a) $\alpha \in B'(\gamma, \beta) \Leftrightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta)$;

b) $\alpha \in \beta$: $h'(\beta, \alpha) := h'(\alpha) \wedge T'(\beta, \alpha) := T'(\alpha) \wedge$
 $\wedge P'(\beta, \alpha) := P'(\alpha) \wedge D'(\beta, \alpha) := D'(\alpha)$;

c) $\alpha \in B(\gamma, \beta) \wedge NF(\gamma, \beta, \alpha) = F^{\beta} \xi \eta$:

$P'(\beta, \alpha) := P'(\beta, P(\beta, \xi)) \cup P'(\beta, \eta) \cup P'(\beta)$;

Fallunterscheidung:

c1) $\xi = 0 \wedge \eta = \eta_1 + 1$: $h'(\beta, \alpha) := \lambda \delta (F^{\beta} o \eta_1 \cdot h'(\beta) \delta)$

$\wedge T'(\beta, \alpha) := T'(\beta) \wedge D'(\beta, \alpha) := D'(\beta)$;

c2) $\xi = \xi_1 + 1 \wedge \neg \lim(\eta)$: $h'(\beta, \alpha) := h$ mit

$ho := \begin{cases} F^{\beta} \xi_1 o & \text{wenn } \eta = 0 \\ F^{\beta} \xi_1 (F^{\beta} \xi \eta_1 + 1) & \text{wenn } \eta = \eta_1 + 1 \end{cases}$

$\wedge h(n+1) := F^{\beta} \xi_1(hn) \wedge T'(\beta, \alpha) := D'(\beta, \alpha) := \omega$;

c3) $\lim(\eta)$: $h'(\beta, \alpha) := F^{\beta} \xi o h'(\beta, \eta) \wedge T'(\beta, \alpha) := T'(\beta, \eta) \wedge$
 $\wedge D'(\beta, \alpha) := D'(\beta, \eta)$;

c4) $\lim(\xi) \wedge \neg \lim(\eta) \wedge T(\beta, \xi) = \beta^+$: $h'(\beta, \alpha) := h$ mit

$ho := \begin{cases} F^{\beta} (h'(\beta, \xi) o) o & \text{wenn } \eta = 0 \\ F^{\beta} (h'(\beta, \xi) (F^{\beta} \xi \eta_1 + 1)) o & \text{wenn } \eta = \eta_1 + 1 \end{cases}$

$h(n+1) := F^{\beta} (h'(\beta, \xi) (hn)) o \wedge T'(\beta, \alpha) := D'(\beta, \alpha) := \omega$;

c5) $\lim(\xi) \wedge \neg \lim(\eta) \wedge T(\beta, \xi) < \beta^+ \wedge D(\beta, \xi) = \omega$:

$h'(\beta, \alpha) := \begin{cases} \lambda \delta (F^{\beta} (h(\beta, \xi) \delta) o) & \text{wenn } \eta = 0 \\ \lambda \delta (F^{\beta} (h(\beta, \xi) \delta) (F^{\beta} \xi \eta_1 + 1)) & \text{wenn } \eta = \eta_1 + 1 \end{cases}$

$\wedge T'(\beta, \alpha) := T(\beta, \xi) \wedge D'(\beta, \alpha) := D'(\beta, D(\beta, \xi))$;

c6) $\lim(\xi) \wedge \neg \lim(\eta) \wedge T(\beta, \xi) < \beta^+ \wedge D(\beta, \xi) = \beta \wedge D(\beta, \xi) + T(\beta, \xi)$:

$h'(\beta, \alpha) := \begin{cases} \lambda \delta F^{\beta} (h(\beta, \xi) (h'(\beta, T(\beta, \xi)) \delta)) o & \text{wenn } \eta = 0 \\ \lambda \delta F^{\beta} (h(\beta, \xi) (h'(\beta, T(\beta, \xi)) \delta)) (F^{\beta} \xi \eta_1 + 1) & \text{wenn } \eta = \eta_1 + 1 \end{cases}$

$\wedge T'(\beta, \alpha) := T'(\beta, T(\beta, \xi)) \wedge D'(\beta, \alpha) := D'(\beta, D(\beta, \xi))$;

d) $\alpha \in B(\gamma, \beta) \wedge NF(\gamma, \beta, \alpha) = \sum_{i=1}^m \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i$:

$P'(\beta, \alpha) := \bigcup \{P'(\beta, \beta^{\xi_i}) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \bigcup \{P'(\eta_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$;

Fallunterscheidung:

d1) $\alpha = \alpha_1 + 1$: $D'(\beta, \alpha) := 1$;

d2) $\lim(\eta_m)$: $h'(\beta, \alpha) := \lambda \delta (\sum_{i=1}^{m-1} \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i + \beta^{\xi_m} \cdot h'(\eta_m) \delta)$

$\wedge T'(\beta, \alpha) := T'(\eta_m) \wedge D'(\beta, \alpha) := D'(\eta_m)$;

d3) $\eta_m = \eta + 1$: $h'(\beta, \alpha) := \lambda \delta (\sum_{i=1}^{m-1} \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i + \beta^{\xi_m} \cdot \eta + h'(\beta, \beta^{\xi_m}) \delta)$

$\wedge T'(\beta, \alpha) := T'(\beta, \beta^{\xi_m}) \wedge D'(\beta, \alpha) := D'(\beta, \beta^{\xi_m})$.

2.9. Definition des BACHMANN-Systems $B''(\gamma, \beta)$ für $\gamma \in B(\beta)$:

a) $\alpha \in B''(\gamma, \beta) : \Leftrightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta)$;

b) $P''(\beta, \alpha) := P'(\beta, P(\beta, \alpha)) \wedge D''(\beta, \alpha) := D'(\beta, D(\beta, \alpha))$;

Fallunterscheidung für $\lim(\alpha)$:

b1) $D(\beta, \alpha) = \omega \wedge T(\beta, \alpha) = \beta^+ : h''(\beta, \alpha) := h$ mit

$h\alpha := h(\beta, \alpha) \circ h(n+1) := h(\beta, \alpha)(F^\beta(hn) \circ) \wedge T''(\beta, \alpha) := \omega$;

b2) $D(\beta, \alpha) = sD(\beta, \alpha) + T(\beta, \alpha) : T''(\beta, \alpha) := T'(\beta, T(\beta, \alpha)) \wedge h''(\beta, \alpha) := h(\beta, \alpha) \circ h'(\beta, T(\beta, \alpha))$;

b3) sonst $h''(\beta, \alpha) := h(\beta, \alpha) \wedge T''(\beta, \alpha) := T(\beta, \alpha)$.

Folgerungen:

2.10. $\gamma < \beta^+ \Rightarrow \gamma \in B(\beta) \wedge P(\beta, \gamma) = P'(\gamma) \wedge D(\beta, \gamma) = D'(\gamma) \wedge (\lim(\gamma) \Rightarrow h'(\beta, \gamma) = h'(\gamma) \wedge T(\beta, \gamma) = T'(\gamma))$;

2.11. $\gamma \in B(\beta) \Rightarrow (\text{succ}(\gamma) \Leftrightarrow D(\beta, \gamma) = 1)$;

2.12.a) $D(\beta, \gamma) = \omega \Rightarrow T(\beta, \gamma) = \omega \vee T(\beta, \gamma) = \text{go}(\delta+1)$;

b) $D(\beta, \gamma) > \omega \Rightarrow D(\beta, \gamma) \notin K \wedge D(\beta, \gamma) = sD(\beta, \gamma) + T(\beta, \gamma)$;

2.13. $P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} \in F^\beta_\xi \eta$;

2.14. $\gamma \in B(\beta) \wedge P(\beta, \gamma) \in B(\gamma, \beta) \wedge \gamma > \beta \Rightarrow B(\gamma, \beta) = \{\xi \mid \xi < F^\beta(\gamma+1) \circ\}$;

2.15. $\alpha \in B(\gamma, \beta) \Rightarrow$ a) $\alpha < \beta^+ \wedge P''(\beta, \alpha) \in \beta$;

b) $\lim(\alpha) \Rightarrow T''(\beta, \alpha) \in \beta$;

c) $\lim(\alpha) \wedge \lim(\beta_1) \wedge \beta = \text{go}\beta_1 \Rightarrow T''(\beta, \alpha) < \beta$;

2.16. $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset B(\beta) \wedge \gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow B(\gamma_1, \beta) \subset B(\gamma_2, \beta)$;

2.17. $\gamma \in B(\beta) \Rightarrow P(\beta, \gamma) < \beta^+ \wedge (\lim(\gamma) \Rightarrow T(\beta, \gamma) \in \beta^+)$.

Anmerkung: Mit $B'(\lambda_0, \omega)$ definiert ISLES ein Ordinalzahlbezeichnungssystem. Er gibt an, daß man für alle Ordinalzahlen kleiner $F^\omega(\lambda_0+1) \circ$ eine Normalform angeben kann, in der nur $0, 1, \lambda_0, +, \cdot, g, F$ auftreten. Genauso beweist man, daß man für alle Ordinalzahlen kleiner $F^\omega(\lambda_0) \circ$ die gleiche Normalform angeben kann und in ihr keine λ_0 auftreten. Deshalb ist $F^\omega(\lambda_0) \circ$ die Grenzzahl des Bezeichnungssystems von ISLES.

§3 Die Normalfunktionen $\theta\alpha$

In diesem Paragraphen führen wir das System von FEFERMAN vor. Die Definitionen und Sätze sind zitiert nach BUCHHOLZ [6]. Dort wird das Auswahlaxiom vorausgesetzt. SCHÜTTE zeigte in [11], daß sich die Funktionen $\theta\alpha$ mit den gewünschten Eigenschaften auch ohne Auswahlaxiom und ohne Regularitätsbedingungen gewinnen lassen.

Die in BUCHHOLZ [6] benutzte Funktionsmenge $\mathcal{G}$ wird auf $\{g\}$ eingeschränkt.

3.1. Definition der Funktionen $\theta\alpha$ und der Ordinalzahlenmengen $C(\alpha, \beta)$ durch transfinite Induktion nach α : Seien $C(\xi, \beta)$ und $\theta\xi$ schon für alle $\xi < \alpha$ und alle β definiert.

(C1) $\gamma = 0 \vee (\gamma \text{ additive Hauptzahl} < \beta) \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \beta)$;

(C2) $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n \text{ add. Hauptz. aus } C(\alpha, \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_1 + \dots + \gamma_n \in C(\alpha, \beta)$;

(C3) $\{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \beta) \wedge \xi < \alpha \wedge \eta \in D\theta\xi \wedge \xi \in C(\xi, \theta\xi\eta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta\xi\eta \in C(\alpha, \beta)$;

(C4) $\{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \beta) \wedge \beta < g\xi\eta \wedge g\xi\eta \notin \{\xi, \eta\} \Rightarrow g\xi\eta \in C(\alpha, \beta)$;

(In) $\text{In}(\alpha) := \{\beta \in \text{ON} \mid \beta \notin C(\alpha, \beta)\}$;

(θ) $\theta\alpha$ ist die Ordnungsfunktion von $\text{In}(\alpha)$.

Folgerungen:

3.2. $\gamma < \beta \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \beta)$;

3.3.a) $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow C(\alpha_1, \beta) \subset C(\alpha_2, \beta) \wedge \text{In}(\alpha_2) \subset \text{In}(\alpha_1)$;

b) $\beta_1 < \beta_2 \wedge \beta_2 \notin K \Rightarrow C(\alpha, \beta_1) \subset C(\alpha, \beta_2)$;

3.4.a) $\lim(\alpha) \Rightarrow C(\alpha, \beta) = \bigcup \{C(\xi, \beta) \mid \xi < \alpha\}$;

b) $\lim(\beta) \Rightarrow C(\alpha, \beta) \subset \bigcup \{C(\alpha, \eta) \mid \eta < \beta\}$;

3.5. Zu α, β existiert $\beta_1 := \min\{\xi \mid \xi \notin C(\alpha, \beta)\}$ und es gilt $\beta \leq \beta_1 < \beta^+ \wedge C(\alpha, \beta_1) = C(\alpha, \beta) \wedge \beta_1 \in \text{In}(\alpha)$;

3.6.a) $D\theta\alpha = \text{ON}$;

b) $S\theta\alpha\beta = S\beta$;

c) $\gamma \in C(\alpha, \beta) \Rightarrow S\gamma \in C(\alpha, \beta)$

d) $\beta \in K \Rightarrow \theta\alpha\beta = \beta$;

- e) $B \in K \Leftrightarrow \theta\alpha B \in K$;
- f) $C(\alpha, \theta\alpha o) = C(\alpha, o) \wedge C(\alpha, \theta\alpha(B+1)) = C(\alpha, \theta\alpha B+1)$;
- g) $\text{In}(o)$ ist die Klasse der additiven Hauptzahlen, also ist für alle α, B $\theta\alpha B$ additive Hauptzahl und $\theta o B = \omega^B$;
- h) $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \theta\alpha_1 B \leq \theta\alpha_2 B \wedge C(\alpha_1, \theta\alpha_1 B) < C(\alpha_2, \theta\alpha_2 B)$;
- 3.7.a) $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \Rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \theta\alpha_1 B)) \Rightarrow \Rightarrow \theta\alpha_1 B = \theta\alpha_2 B \wedge C(\alpha_1, \theta\alpha_1 B) = C(\alpha_2, \theta\alpha_2 B)$;
- b) $\forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \Rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \theta\alpha_1 B)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \Rightarrow \xi \notin C(\alpha_2, \theta\alpha_2 B))$;
- 3.8. $\exists \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \wedge \xi \in C(\alpha_2, \theta\alpha_2 B)) \Rightarrow \theta\alpha_1(\theta\alpha_2 B) = \theta\alpha_1 B$;
- 3.9.a) $\theta\alpha B \leq \gamma \wedge \gamma \in C(\alpha, \theta\alpha B) \Rightarrow SB < S\gamma$;
- b) $S\gamma \leq SB \Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \theta\alpha B) \Leftrightarrow \gamma < \theta\alpha B)$;
- 3.10.a) $\theta\alpha$ ist Normalfunktion;
- b) $\text{In}(\alpha+1) = \{\theta\alpha B \mid \alpha \notin C(\alpha, \theta\alpha B) \vee \theta\alpha B = B\}$;
- c) $\lim(\alpha) \Rightarrow \text{In}(\alpha) = \bigcap \{\text{In}(\xi) \mid \xi < \alpha\}$;
- 3.11. $\theta\alpha_1 B_1 < \theta\alpha_2 B_2$ gilt genau dann, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:
- (i) $\exists \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \wedge \xi \in C(\alpha_2, \theta\alpha_2 B_2)) \wedge B_1 < \theta\alpha_2 B_2$;
- (ii) $\forall \xi (\alpha_1 \leq \xi < \alpha_2 \Rightarrow \xi \notin C(\alpha_1, \theta\alpha_1 B_1)) \wedge B_1 < B_2$;
- (iii) $\theta\alpha_1 B_1 < B_2$;
- 3.12. $\theta\alpha B < \theta\xi\eta < \theta\alpha(B+1) \Rightarrow \xi < \alpha$;
- 3.13. $\{B_1, B_2\} < \theta\alpha_1 B_1 = \theta\alpha_2 B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$
- 3.14.a) $\xi + \eta \in C(\alpha, B) \Rightarrow \eta \in C(\alpha, B)$;
- b) $\theta\xi\eta \in C(\alpha, B) \Rightarrow \eta \in C(\xi, B)$;
- c) $g\xi\eta \in C(\alpha, B) \Rightarrow \eta \in C(\alpha, B)$;
- 3.15.a) $\{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, B) \Rightarrow \xi + \eta \in C(\alpha, B)$;
- b) $\{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, B) \wedge \xi < \alpha \Rightarrow \theta\xi\eta \in C(\alpha, B)$;
- c) $\{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, B) \wedge B \neq g\xi\eta \Rightarrow g\xi\eta \in C(\alpha, B)$;

3.16. Definition der Normalformen:

- a) $\gamma \equiv_{NF} \gamma_1 + \dots + \gamma_n : \Leftrightarrow \gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n \wedge 2 \leq n \wedge \wedge \gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n \text{ add. Hauptz.};$
- b) $\gamma \equiv_{NF} \theta\xi\eta : \Leftrightarrow \gamma = \theta\xi\eta \wedge \xi \in C(\xi, \theta\xi\eta) \wedge \eta < \theta\xi\eta$;
- c) $\gamma \equiv_{NF} g\xi\eta : \Leftrightarrow \gamma = g\xi\eta \wedge \{\xi, \eta\} < \gamma \wedge (\xi \neq o \vee \eta \neq o)$;

3.17.a) $\gamma \equiv_{\mathbb{N}^+} \gamma_1 + \dots + \gamma_n \Rightarrow$

$\Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subset C(\alpha, \mathbb{B}));$

b) $\mathbb{B} \leq \gamma \equiv_{\mathbb{N}^+} \theta \xi \eta \Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \mathbb{B}) \wedge \xi < \alpha);$

c) $\gamma \equiv_{\mathbb{N}^+} g \xi \eta \Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \mathbb{B}) \Leftrightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \mathbb{B}) \wedge \mathbb{B} \neq \gamma);$

3.18. $\gamma \in C(\Lambda_0, 0) \Rightarrow \gamma < \Lambda_0 \wedge \gamma < g \gamma 0;$

3.19. Definition:

$\mu(\alpha) := \min\{\mathbb{B} \mid \alpha \in C(\alpha, \theta \alpha \mathbb{B})\};$

3.20.a) $\mu(\alpha)$ ist keine Limeszahl;

b) $\gamma \in C(\alpha, \mathbb{B}) \wedge \gamma \in C(\xi, \theta \xi (\eta + 1)) \setminus C(\xi, \theta \xi \eta) \Rightarrow \eta \in C(\alpha, \mathbb{B});$

c) $\gamma \in C(\alpha, \mathbb{B}) \Rightarrow \mu(\gamma) \in C(\alpha, \mathbb{B}).$

Anmerkung: Die letzte Definition mit Satz zitierten wir aus BUCHHOLZ [7]. Dort wird ein etwas anderer Formalismus benutzt, doch lassen sich die Beweise sehr einfach in den hier benutzten Formalismus übertragen.

In [6] zeigt BUCHHOLZ, daß sich mit diesen Hilfsmitteln ein Ordinalzahlbezeichnungssystem bis zur Grenzzahl $\theta(\Lambda_0)0$ definieren läßt: Jeder kleineren Ordinalzahl wird eine Normalform zugeordnet, in der nur $0, +, \theta, g$ auftreten.

§4 Hilfsdefinitionen und -Sätze

I Zum ISLESSchen Bezeichnungssystem

4.1. Lemma:

Sei f Normalfunktion mit regulärem Fixpunkt $\delta, \delta > \omega$,
 $0 < f_0$, $\mathcal{L}(\delta)$ sei BACHMANN-Menge, $\{f_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{L}(\delta)\}$ wie in
 Satz 1.9. und $\gamma \in \mathcal{L}(\delta)$, dann gilt:

a) $f_{00} \leq f_\gamma 0$;

b) $\lim(\gamma) \wedge \eta < \tau_\gamma \Rightarrow \eta \leq f(h_\gamma \eta) 0$.

Beweis: a) durch transfinite Induktion nach γ :

a1) $\gamma = 0$: $f_{00} = f_{00}$;

a2) $\gamma = \gamma_1 + 1$: $f_{00} \leq f_{\gamma_1} 0 < f_\gamma 0$ (I.V., 1.9.c)

a3) $\lim(\gamma) \wedge \tau_\gamma < \delta$: $f_{00} \leq f(h_\gamma 0) 0 \leq h_\gamma 0$ (I.V., 1.9.d)

a4) $\lim(\gamma) \wedge \tau_\gamma = \delta$: $f_{00} \leq f(h_\gamma(f_\gamma 0)) 0 = f_\gamma 0$ (I.V., 1.9.e)

b) durch transfinite Induktion nach η :

b1) $\eta = 0$: $0 < f_{00} \leq f(h_\gamma 0) 0$ (4.1.a)

b2) $\eta = \eta_1 + 1$: $\eta \leq f(h_\gamma \eta_1) 0 + 1$ (I.V.)
 $\leq f(h_\gamma \eta_1 + 1) 0 \leq f(h_\gamma \eta) 0$ (1.9.c, f)

b3) $\lim(\eta)$: $\lim(h_\gamma \eta) \wedge \tau_{h_\gamma \eta} = \eta < \tau_\gamma \leq \delta$ (1.8.B3d)

$Wf(h_\gamma \eta) = \bigcap \{Wf(h(h_\gamma \eta) \eta_1) \mid \eta_1 < \eta\}$ (1.9.d)

$= \bigcap \{Wf(h_\gamma \eta_1) \mid \eta_1 < \eta\}$ (1.8.B3d)

Für $\eta_1 < \eta$: $\eta_1 < f(h_\gamma \eta_1) 0 \leq f(h_\gamma \eta) 0$ (I.V.)

$\Rightarrow \eta = \{\eta_1 \mid \eta_1 < \eta\} \leq f(h_\gamma \eta) 0$.

4.2. Lemma:

$\alpha \in B(\gamma, \mathcal{B}) \wedge NF(\gamma, \mathcal{B}, \alpha) = F^{\mathcal{B}} \xi \eta \Rightarrow$

a) $P(\mathcal{B}, \xi) \cup \{\eta\} < \alpha \wedge \xi \neq \alpha$;

b) $\alpha \leq P(\mathcal{B}, \gamma) \Rightarrow \xi < \gamma$.

Beweis: a) $\alpha \in B(\gamma, \mathcal{B})$ nur nach 2.7.b2 möglich $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(\mathcal{B}, \xi) \cup \{\eta\} < \alpha$;

Annahme $\xi = \alpha < \mathcal{B}^+$ (2.15.a)

$\Rightarrow \alpha \leq P'(\mathcal{B}) \cup \{\alpha\} = P'(\alpha)$ (2.1.c, 2.3.d)

$= P(\mathcal{B}, \alpha) = P(\mathcal{B}, \xi)$ (2.10., Ann.)

- $\Rightarrow \alpha \leq P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} < \alpha$ Widerspruch (2.1.c)
 b) $\xi \leq \gamma$: Annahme $\xi = \gamma \Rightarrow$ (2.6.b)
 $\Rightarrow P(\beta, \gamma) \cup \{\eta\} = P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} < \alpha \leq P(\beta, \gamma)$ (Vor.)
 Widerspruch.

4.3. Definition der Ordinalzahlmenge $PB(\beta, \gamma)$ für $P(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta)$:

- a) $\gamma \leq \beta$: $PB(\beta, \gamma) := P(\beta, \gamma)$;
 b) $\beta < \gamma$: dann induktive Definition von $PB(\beta, \gamma)$:
 b1) $P(\beta, \gamma) \subset PB(\beta, \gamma)$;
 b2) $NF(\gamma, \beta, \alpha) = F^{\beta}_{\xi} \eta \wedge \alpha \in PB(\beta, \gamma) \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} \subset PB(\beta, \gamma)$;
 b3) $NF(\gamma, \beta, \alpha) = \sum_{i=1}^m \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i ==$
 $\Rightarrow \{\beta^{\xi_1}, \dots, \beta^{\xi_m}, \eta_1, \dots, \eta_m\} \subset PB(\beta, \gamma)$.

4.4. Lemma: Sei $P(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta)$:

- a) $PB(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta)$;
 b) $PB(\beta, \gamma) \leq P(\beta, \gamma)$;
 c) $NF(\gamma, \beta, \alpha) = F^{\beta}_{\xi} \eta \wedge \alpha \in PB(\beta, \gamma) \Rightarrow \xi \neq \alpha$;
 d) $NF(\gamma, \beta, \alpha) = F^{\beta}_{\xi} \eta \wedge \alpha \in PB(\beta, \gamma) \Rightarrow \xi < \gamma \wedge \eta < \alpha$.

Beweis: a) und b) durch Induktion nach der Definition 4.3.: $\gamma \leq \beta$, dann klar; sei jetzt $\beta < \gamma$:

- a1) $\alpha \in PB(\beta, \gamma) \wedge \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta)$; (2.7.b1)
 a2) $\alpha \in PB(\beta, \gamma) \wedge \alpha = F^{\beta}_{\xi} \eta \Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta) \wedge \alpha \leq P(\beta, \gamma)$ (I.V.)
 $\alpha \in B(\gamma, \beta)$ nur nach 2.7.b2 möglich
 $\Rightarrow P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} \subset B(\gamma, \beta) \wedge P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} < \alpha \leq P(\beta, \gamma)$ (2.7.b2)
 a3) $\alpha \in PB(\beta, \gamma) \wedge \alpha = \sum_{i=1}^m \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta) \wedge \alpha \leq P(\beta, \gamma)$ (I.V.)
 $\alpha \in B(\gamma, \beta)$ nur nach 2.7.b3 möglich
 $\Rightarrow \{\beta^{\xi_1}, \dots, \beta^{\xi_m}, \eta_1, \dots, \eta_m\} \subset B(\gamma, \beta) \wedge$ (2.7.b3)
 $\wedge \{\beta^{\xi_1}, \dots, \beta^{\xi_m}, \eta_1, \dots, \eta_m\} < \alpha \leq P(\beta, \gamma)$;
 c) Beh. folgt aus 4.2.a und 4.4.a;
 d) Beh. folgt aus 4.2.b und 4.4.b.a.

4.5. Lemma:

- a) $P(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta) \Leftrightarrow PB(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta);$
 b) $\alpha \leq P(\beta, \gamma) \Rightarrow (\alpha \in B(\gamma, \beta) \Leftrightarrow \alpha \in B(\gamma+1, \beta));$
 c) $P(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta) \Leftrightarrow P(\gamma+1, \beta) \subset B(\gamma+1, \beta).$

Beweis: a) " $\Rightarrow$ " nach 4.4.a; " $\Leftarrow$ " nach 4.3.a, b1;

b) " $\Rightarrow$ " " $\alpha \in B(\gamma, \beta) \subset B(\gamma+1, \beta);$ (2.16.)

" $\Leftarrow$ " Fallunterscheidung nach Definition 2.7.:

Fall 1: $\gamma+1 \leq \beta: \alpha \leq P(\beta, \gamma) \leq \gamma \Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta)$ (2.2.P1, 2.7.a)

Fall 2: $\beta < \gamma+1$: Induktion nach $\alpha \in B(\gamma+1, \beta)$:

2.1.: $\alpha \leq \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \in \{\xi \mid \xi \leq \beta\} \subset B(\gamma, \beta)$ (2.7.a, b1)

2.2.: $NF(\gamma+1, \beta, \alpha) = F^\beta \xi \eta \wedge P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} \subset B(\gamma+1, \beta) \wedge$
 $\wedge P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} < \alpha \leq P(\beta, \gamma)$

$\Rightarrow P(\beta, \xi) \cup \{\eta\} \subset B(\gamma, \beta) \wedge \xi \leq \gamma$ (I.V.; 4.4.d)

$\Rightarrow NF(\gamma, \beta, \alpha) = F^\beta \xi \eta \wedge \alpha \in B(\gamma, \beta)$ (2.6.b, 2.7.b2)

2.3.: $NF(\gamma+1, \beta, \alpha) = \sum \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i \wedge \{\beta^{\xi_1}, \dots, \beta^{\xi_m}\} \subset B(\gamma+1, \beta)$

$\Rightarrow \{\beta^{\xi_1}, \dots, \beta^{\xi_m}\} \subset B(\gamma, \beta) \wedge NF(\gamma, \beta, \alpha) = \sum \beta^{\xi_i} \cdot \eta_i$
 (I.V., 2.6.c)

$\Rightarrow \alpha \in B(\gamma, \beta);$ (2.7.b3)

c) $P(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta) \Leftrightarrow$

$\Leftarrow P(\beta, \gamma) \subset B(\gamma+1, \beta)$ (4.5.b)

$\Leftarrow P(\beta, \gamma) \cup \{1\} \subset B(\gamma+1, \beta)$ (2.7.a, b1)

$\Leftarrow P(\beta, \gamma+1) \subset B(\gamma+1, \beta).$ (2.4.b)

II Zum FEFERMAN-ACZELschen Bezeichnungssystem

4.6. Lemma:

a) $0 < \alpha \Rightarrow \{1, \omega\} \subset C(\alpha, \beta);$

b) $\alpha \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) \Leftrightarrow \alpha+1 \in C(\alpha+1, \theta\alpha\beta).$

Beweis: a) $0 \in C(\alpha, \beta)$ (3.1.C1)

$\Rightarrow 1 = \theta 0 0 \in C(\alpha, \beta)$ (3.6.f, 3.15.b)

$\Rightarrow \omega = \theta 0 1 \in C(\alpha, \beta);$ (3.6.f, 3.15.b)

b) " $\Rightarrow$ " $\{\alpha, 1\} \subset C(\alpha+1, \theta\alpha\beta)$ (3.3.a, 4.6.a)

$\Rightarrow \alpha+1 \in C(\alpha+1, \theta\alpha\beta);$ (3.15.a)

" $\Leftarrow$ " indirekt, Annahme: $\alpha \notin C(\alpha, \theta\alpha\beta)$

$\Rightarrow \alpha \notin C(\alpha, \theta\alpha\beta) = C(\alpha+1, \theta\alpha\beta)$ (3.7.a)

$\Rightarrow \alpha+1 \notin C(\alpha+1, \theta\alpha\beta)$ Widerspruch. (3.17.a)

4.7. Lemma:

a) $\text{In}(1)$ ist die Klasse der ε -Zahlen; also ist für $0 < \alpha$ und für alle β $\theta\alpha\beta$ ε -Zahl und damit multiplikative Hauptzahl;

$$\begin{aligned} b) \quad \gamma &= \xi \cdot \eta \wedge S\gamma \leq S\beta \wedge 0 < \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) &\Leftrightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \theta\alpha\beta)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: a) } \text{In}(1) &= \{\theta o\beta \mid o \notin C(o, \theta o\beta) \vee \theta o\beta = \beta\} \quad (3.10.b) \\ &= \{\omega^\beta \mid \omega^\beta = \beta\}; \quad (3.6.f, 3.1.C1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \gamma \in C(\alpha, \theta\alpha\beta) &\Leftrightarrow \gamma < \theta\alpha\beta \quad (3.9.b) \\ &\Leftrightarrow \{\xi, \eta\} < \theta\alpha\beta \quad (4.7.a) \\ &\Leftrightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \theta\alpha\beta). \quad (3.9.b) \end{aligned}$$

4.8. Lemma: $0 < \alpha$

- a) $\delta \notin K_0 \Rightarrow S\delta < \delta < \delta^+$;
 b) $\delta \notin K \Rightarrow \{s\delta, \delta^+\} \subset C(\alpha, \delta)$;
 c) $\delta \notin K \wedge \gamma \in C(\alpha, \delta^+ + 1) \cap C(\alpha + 1, \delta) \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \delta)$;
 d) $C(\alpha, \delta^+ + 1) = \bigcup \{C(\alpha, \eta) \mid \eta < \delta^+\}$.

Beweis: a) nach 1.6.e und 1.7.g;

$$\begin{aligned} b) \quad (s\delta = \omega \vee s\delta = S\delta) \wedge \delta^+ &= go(\eta + 1) \quad (1.6.f, e, 1.7.h) \\ \Rightarrow s\delta \in C(\alpha, \delta) \wedge \eta &\leq go\eta < \delta \quad (4.6.a, 3.6.c, 1.7.a, 1.6.d) \\ \Rightarrow \{o, 1, \eta\} &\subset C(\alpha, \delta) \quad (3.1.C1, 3.2., 4.6.a) \\ \Rightarrow \delta^+ &\in C(\alpha, \delta) \quad (3.15.a, c) \end{aligned}$$

c) C-Induktion nach $\gamma \in C(\alpha + 1, \delta)$: $\gamma < \delta$ folgt mit 3.2.;

(C2) Beh. folgt mit I.V. und 3.17.a;

$$\begin{aligned} (C3) \quad \gamma \not\leq \theta\xi\eta \geq \delta &\Rightarrow \gamma > \delta^+ \quad (3.9.a) \\ \Rightarrow \{\xi, \eta\} &\subset C(\alpha, \delta^+ + 1) \cap C(\alpha + 1, \delta) \wedge \xi < \alpha \quad (3.17.b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \delta) \wedge \xi < \alpha \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \delta) \quad (\text{I.V.}, 3.17.b)$$

$$(C4) \quad \gamma \not\leq g\xi\eta: \text{Fall 1: } \gamma = \delta^+ \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \delta) \quad (4.8.b)$$

$$\text{Fall 2: } \gamma > \delta^+ \Rightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \delta^+ + 1) \cap C(\alpha + 1, \delta) \quad (3.17.c)$$

$$\Rightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \delta) \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \delta); \quad (\text{I.V.}, 3.17.c)$$

d) " $\subset$ " C-Induktion nach $\gamma \in C(\alpha, \delta^+ + 1)$:

$$(C1) \text{ Fall 1: } \gamma < \delta^+ \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \gamma + 1) \quad (3.2.)$$

$$\text{Fall 2: } \gamma = \delta^+ \Rightarrow \gamma \in C(\alpha, \delta + 1) \quad (4.8.b)$$

(C2) - (C4) Beh. folgt mit I.V.;

" $\supset$ " Beh. folgt mit 3.3.b.

III Gemischte Sätze

4.9. Lemma:

$$\omega \leq \beta < \alpha \Rightarrow (\omega^\alpha = \alpha \Leftrightarrow \beta^\alpha = \alpha).$$

Beweis: " $\Rightarrow$ " $\beta < \alpha = \omega^\alpha \Rightarrow \alpha$ ist ε -Zahl

$\Rightarrow \alpha$ ist Potenzhauptzahl $\Rightarrow \beta^\alpha = \alpha$;

" $\Leftarrow$ " $\alpha \leq \omega^\alpha \leq \beta^\alpha = \alpha$.

4.10. Definition: Sei $\beta \in K_\omega$:

$$\text{In}(\alpha, \beta) := \{\gamma \mid \gamma \in \text{In}(\alpha) \wedge \beta < \gamma < \beta^+\}.$$

4.11. Satz:

$$\gamma \in B(\beta) \wedge \gamma \leq \alpha \wedge \delta \in \text{In}(\alpha, \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P'(\gamma) \subset C(\alpha, \delta)).$$

Beweis durch transfinite Induktion nach γ :

$$a) \gamma = 0: 0 \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{0\} \subset C(\alpha, \delta)$$

$$\Leftrightarrow P'(\gamma) \subset C(\alpha, \delta) \quad (2.3.b)$$

$$b) \gamma = \eta + 1: \gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{\eta, 1\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (3.17.a)$$

$$\Leftrightarrow P'(\eta) \cup \{1\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (I.V.)$$

$$\Leftrightarrow P'(\gamma) \subset C(\alpha, \delta) \quad (2.3.c)$$

$$c) \lim(\gamma) \wedge \gamma \notin Wgo \Rightarrow \gamma = s\gamma + \eta \quad (1.7.g)$$

$$\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{s\gamma, \eta\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (4.8.b, 3.14.a, 3.15.a)$$

$$\Leftrightarrow P'(s\gamma) \cup \{\eta\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (I.V.)$$

$$\Leftrightarrow P'(\gamma) \subset C(\alpha, \delta) \quad (2.3.d)$$

$$d) \lim(\gamma) \wedge \gamma \in Wgo \Rightarrow \gamma = g\xi\eta \wedge \{\xi, \eta\} < \gamma \quad (1.7.f)$$

$$\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (3.17.c)$$

$$\Leftrightarrow P'(\xi) \cup P'(\eta) \cup \{\omega\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (I.V., 4.6.a)$$

$$\Leftrightarrow P'(\gamma) \subset C(\alpha, \delta). \quad (2.3.e)$$

4.12. Definition:

Für $\gamma \in B(\beta)$ definieren wir $A(\beta, \gamma)$ durch transfinite Induktion nach γ :

$$a) A(\beta, 0) := \emptyset;$$

$$b) \gamma = \eta + 1 \wedge \eta \in C(\eta, F^\beta \eta 0) \Rightarrow A(\beta, \gamma) := A(\beta, \eta);$$

$$c) \gamma = \eta + 1 \wedge \eta \notin C(\eta, F^\beta \eta 0) \Rightarrow A(\beta, \gamma) := A(\beta, \eta) \cup \{F^\beta \eta 0\};$$

- d) $\lim(\gamma) \wedge T(\beta, \gamma) < \beta^+ \Rightarrow$
 $\Rightarrow A(\beta, \gamma) := \bigcup \{A(\beta, h(\beta, \gamma)\delta) \mid \delta < T(\beta, \gamma)\};$
e) $\lim(\gamma) \wedge T(\beta, \gamma) = \beta^+ \Rightarrow$
 $\Rightarrow A(\beta, \gamma) := \{\delta \mid \delta < \beta^+ \wedge \delta \in A(\beta, h(\beta, \gamma)\delta)\}.$

4.13. Lemma:

- a) $\eta > 0 \Rightarrow \text{WF}^\beta \eta \subset \text{In}(0, \beta) \cup \{\beta\};$
b) $\delta \in A(\beta, \gamma) \Rightarrow \omega < \delta \wedge \delta \in \text{In}(0, \beta) \cup \{\beta\};$
c) $T(\beta, \gamma) = \beta^+ \wedge \delta \in A(\beta, \gamma) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists \eta (\eta < \delta < \beta^+ \wedge \delta \in A(\beta, h(\beta, \gamma)\eta)).$

Beweis: a) Induktion nach der Definition 2.5.:

- a1) $F^\beta 1 = (F^\beta 0)' = \{\delta \mid \delta < \beta^+ \wedge \beta^\delta = \delta\} \quad (2.5.b, a)$
 $= \{\delta \mid \beta \leq \delta < \beta^+ \wedge \omega^\delta = \delta\} \quad (4.9.)$
 $\subset \text{In}(0, \beta) \cup \{\beta\} \quad (3.6.f)$

a2) $\eta > 1$: Beh. folgt mit I.V.;

b) durch transfinite Induktion nach γ :

b1) $\gamma = 0$ klar;

b2) $\gamma = \eta + 1 \wedge \eta \in C(\eta, F^\beta \eta 0)$: Beh. folgt mit I.V. und 4.13.a;

b3) sonst folgt die Beh. mit I.V.;

- c) $\delta < \beta^+ \wedge \delta \in A(\beta, h(\beta, \gamma)\delta) \wedge \lim(\delta) \quad (4.12.c, 4.13.a)$
 $\Rightarrow \lim(h(\beta, \gamma)\delta) \wedge T(\beta, h(\beta, \gamma)\delta) = \delta \quad (1.8.B3d)$
 $\Rightarrow \delta \in \bigcup \{A(\beta, h(\beta, h(\beta, \gamma)\delta)\eta) \mid \eta < \delta\} \quad (4.12.d)$
 $= \bigcup \{A(\beta, h(\beta, \gamma)\eta) \mid \eta < \delta\} \quad (1.8.B3d)$
 $\Rightarrow \exists \eta (\eta < \delta < \beta^+ \wedge \delta \in A(\beta, h(\beta, \gamma)\eta)).$

4.14. Lemma:

- $\gamma \in B(\beta) \wedge \lim(\gamma) \wedge \eta < T(\beta, \gamma) \Rightarrow$
 $\Rightarrow A(\beta, h(\beta, \gamma)\eta + 1) \subset A(\beta, h(\beta, \gamma)(\eta + 1)).$

Beweis durch Definition einer endlichen Ordinalzahl-

folge $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ mit $h(\beta, \gamma)\eta + 1 = \alpha_k < \dots < \alpha_1 = h(\beta, \gamma)(\eta + 1)$

und $A(\beta, \alpha_{i+1}) \subset A(\beta, \alpha_i)$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $\alpha_1 \in B(\beta)$:

a) $\alpha_1 := h(\beta, \gamma)(\eta + 1);$

b) $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ seien definiert:

Fall 1: $\alpha_1 = h(\beta, \gamma)\eta + 1$, dann fertig;

Fall 2: $\alpha_1 = \delta + 1 > h(\beta, \gamma)\eta + 1 \Rightarrow \alpha_{i+1} := \delta$

$\Rightarrow$ Beh. folgt mit 4.12.b, c;

Fall 3: $\lim(\alpha_i) \wedge \alpha_i > h(\beta, \gamma)\eta + 1$:

$$h(\beta, \gamma)\eta \leq h(\beta, \alpha_1)0 < h(\beta, \alpha_1)1 < \alpha_1 \quad (1.8.B3e)$$

$$\alpha_{i+1} := h(\beta, \alpha_1)1;$$

Fall 3a) $T(\beta, \alpha_1) < \beta^+$, Beh. folgt mit 4.12.e;

$$\text{Fall 3b) } T(\beta, \alpha_1) = \beta^+; \text{ sei } \delta \in A(\beta, \alpha_{i+1}) = A(\beta, h(\beta, \alpha_1)1)$$

$$\Rightarrow \delta < \beta^+ \wedge \lim(\delta) \quad (4.13.b)$$

$$\Rightarrow \lim(h(\beta, \alpha_1)\delta) \wedge T(\beta, h(\beta, \alpha_1)\delta) = \delta \quad (1.8.B3d)$$

$$\Rightarrow A(\beta, h(\beta, \alpha_1)\delta) = \cup \{A(\beta, h(\beta, h(\beta, \alpha_1)\delta)\xi) \mid \xi < \delta\} \quad (4.12.d)$$

$$= \cup \{A(\beta, h(\beta, \alpha_1)\xi) \mid \xi < \delta\} \quad (1.8.B3d)$$

$$\supset A(\beta, h(\beta, \alpha_1)1)$$

$$\Rightarrow \delta < \beta^+ \wedge \delta \in A(\beta, h(\beta, \alpha_1)\delta)$$

$$\Rightarrow \delta \in A(\beta, \alpha_1). \quad (4.12.e)$$

4.15. Satz:

$$\gamma \in B(\beta) \wedge \lim(\gamma) \wedge \xi < \eta < T(\beta, \gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(\beta, h(\beta, \gamma)\xi + 1) \subset A(\beta, h(\beta, \gamma)\eta).$$

Beweis durch transfinite Induktion nach $\eta > \xi$:

a) $\eta = \xi + 1$, Beh. folgt mit 4.14.;

b) $\eta = \delta + 1 > \xi$:

$$A(\beta, h(\beta, \gamma)\xi + 1) \subset A(\beta, h(\beta, \gamma)\delta) \quad (I.V.)$$

$$\subset A(\beta, h(\beta, \gamma)\delta + 1) \quad (4.12.a, c)$$

$$\subset A(\beta, h(\beta, \gamma)\eta) \quad (4.14.)$$

$$c) \lim(\eta): T(\beta, h(\beta, \gamma)\eta) = \eta < \beta^+ \quad (1.8.B3d, 2.17.)$$

$$A(\beta, h(\beta, \gamma)\xi + 1) \subset \cup \{A(\beta, h(\beta, \gamma)\delta) \mid \delta < \eta\} \quad (I.V.)$$

$$= \cup \{A(\beta, h(\beta, h(\beta, \gamma)\eta)\delta) \mid \delta < \eta\} \quad (1.8.B3d)$$

$$= A(\beta, h(\beta, \gamma)\eta). \quad (4.12.d)$$

4.16. Definition:

Für $\gamma \in B(\beta) \setminus \{0\}$ definieren wir Ordinalzahlen $t(\beta, \gamma)$

und $\{\gamma(\beta, \eta) \mid \eta < t(\beta, \gamma)\}$:

$$a) \lim(\gamma): t(\beta, \gamma) := T(\beta, \gamma) \wedge \gamma(\beta, \eta) := h(\beta, \gamma)\eta;$$

$$b) \gamma = \xi + 1: t(\beta, \gamma) := 1$$

$$\gamma(\beta, \eta) := \begin{cases} \xi & \text{für } \eta = 0 \\ \gamma & \text{für } \eta = 1; \end{cases}$$

c) $B(\beta)$ heißt gut, wenn gilt

$$\gamma \in B(\beta) \wedge \delta \in \text{In}(\gamma, \beta) \wedge \eta \leq t(\beta, \gamma) \wedge \gamma \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\gamma(\beta, \eta) \in C(\gamma(\beta, \eta), \delta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma(\beta, 0) \in C(\gamma(\beta, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta)).$$

4.17. Lemma:

$$B(\beta) \text{ gut} \wedge \gamma \in B(\beta) \wedge \delta \in \text{In}(\gamma, \beta) \wedge \eta \leq t(\beta, \gamma) \wedge \gamma \neq 0 \wedge \\ \wedge \gamma(\beta, \eta) \notin C(\gamma(\beta, \eta), \delta) \Rightarrow \gamma \notin C(\gamma, \delta).$$

$$\text{Beweis: } \gamma(\beta, 0) \notin C(\gamma(\beta, 0), \delta) \vee \eta \notin C(\eta, \delta) \quad (4.16.c)$$

$$\text{Fall 1: } \gamma(\beta, 0) \notin C(\gamma(\beta, 0), \delta) \Rightarrow \gamma \notin C(\gamma, \delta) \quad (4.16.c, a)$$

$$\text{Fall 2: } \eta \notin C(\eta, \delta) \wedge \eta \leq t(\beta, \gamma) \leq \beta^+ \quad (2.17.)$$

$$\Rightarrow \delta \leq \eta \leq t(\beta, \gamma) \leq \beta^+ \quad (3.9.b, 4.8.b)$$

$$\Rightarrow t(\beta, \gamma) \notin C(t(\beta, \gamma), \delta) \quad (3.9.b)$$

$$\Rightarrow \gamma \notin C(\gamma, \delta). \quad (4.16.c)$$

4.18. Lemma:

$$\gamma \in B(\beta) \wedge \delta \in \text{In}(\gamma, \beta) \wedge \gamma \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D(\beta, \gamma) \leq \delta \Leftrightarrow t(\beta, \gamma) \in C(t(\beta, \gamma), \delta)).$$

Beweis durch Fallunterscheidung:

$$\text{Fall 1: } D(\beta, \gamma) = 1 \Rightarrow \text{suc}(\gamma) \quad (2.11.)$$

$$\Rightarrow t(\beta, \gamma) = 1 \quad (4.16.b)$$

$$\Rightarrow (1 \leq \delta \Leftrightarrow 1 \in C(1, \delta)) \quad (3.9.b)$$

$$\text{Fall 2: } D(\beta, \gamma) = \omega \Rightarrow \text{lim}(\gamma) \quad (2.12.)$$

$$\Rightarrow t(\beta, \gamma) = T(\beta, \gamma) \wedge \delta \geq \omega \quad (4.16.a, 3.10.)$$

$$\Rightarrow t(\beta, \gamma) = \omega \vee t(\beta, \gamma) = \text{go}(\xi+1) \leq \beta^+ \quad (2.12.a, 2.17.)$$

$$\Rightarrow D(\beta, \gamma) \leq \delta \wedge t(\beta, \gamma) \in C(t(\beta, \gamma), \delta) \quad (3.2., 4.8.b)$$

$$\text{Fall 3: } D(\beta, \gamma) \geq \omega \Rightarrow \text{lim}(\gamma) \quad (2.12.)$$

$$\Rightarrow t(\beta, \gamma) = T(\beta, \gamma) \wedge \delta \geq \omega \quad (4.16.a, 3.10.)$$

$$\Rightarrow D(\beta, \gamma) = sD(\beta, \gamma) + t(\beta, \gamma) \leq \beta^+ \wedge \quad (2.12.b, 2.17.)$$

$$\wedge t(\beta, \gamma) \leq \gamma \quad (1.8.b)$$

$$D(\beta, \gamma) \leq \delta \Leftrightarrow sD(\beta, \gamma) \leq \delta \wedge t(\beta, \gamma) \leq \delta \quad (3.6.g)$$

$$\Leftrightarrow t(\beta, \gamma) \leq \delta \quad (1.6.a, 4.10.)$$

$$\Leftrightarrow t(\beta, \gamma) \in C(t(\beta, \gamma), \delta). \quad (3.9.b)$$

4.19. Lemma: $\gamma \in B(B)$:

$$a) P(B, \gamma) \leq F_{\gamma}^B 1 \wedge P(B, \gamma) \in C(\gamma, F_{\gamma}^B 1);$$

$$b) P(B, h(B, \gamma) o) \leq F_{\gamma o}^B o \wedge P(B, h(B, \gamma) o) \in C(h(B, \gamma) o, F_{\gamma o}^B o);$$

$$c) \delta \in \text{In}(\alpha, B) \Rightarrow (P(B, \gamma) \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(B, \gamma) \leq \delta);$$

$$d) F_{\gamma o}^B o \in \text{In}(\gamma, B) \Rightarrow (P(B, \gamma) \in C(\gamma, F_{\gamma o}^B o) \Leftrightarrow D(B, \gamma) \leq F_{\gamma o}^B o).$$

$$\text{Beweis: } a) P(B, \gamma) \leq F_{\gamma o}^B o \leq F_{\gamma}^B 1 \quad (2.13.)$$

$$\Rightarrow P(B, \gamma) \in C(\gamma, F_{\gamma}^B 1); \quad (3.2.)$$

$$b) P(B, h(B, \gamma) o) \leq F_{\gamma}^B (h(B, \gamma) o) o \quad (2.13.)$$

$$\leq F_{\gamma}^B (h(B, \gamma) o + 1) o \quad (1.9.c)$$

$$\leq F_{\gamma}^B (h(B, \gamma) 1) o \quad (1.9.f)$$

$$\leq F_{\gamma o}^B o \quad (1.9.d, e)$$

$$\Rightarrow P(B, h(B, \gamma) o) \in C(h(B, \gamma) o, F_{\gamma o}^B o); \quad (3.2.)$$

$$c) P(B, \gamma) \leq B^+ \quad (2.17.)$$

$$\Rightarrow (P(B, \gamma) \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(B, \gamma) \leq \delta); \quad (3.9.b)$$

$$d) P(B, \gamma) \in C(\gamma, F_{\gamma o}^B o) \Leftrightarrow P(B, \gamma) \leq F_{\gamma o}^B o \quad (4.19.c)$$

$$\Leftrightarrow P(B, h(B, \gamma) o) \cup \{D(B, \gamma)\} \leq F_{\gamma o}^B o \quad (2.2.P4)$$

$$\Leftrightarrow D(B, \gamma) \leq F_{\gamma o}^B o; \quad (4.19.b)$$

§5 Die ACZELsche Vermutung

Wir werden folgenden Satz beweisen:

- 5.1. Hauptsatz: $\gamma \in B(B) \wedge \gamma \leq \alpha \wedge \delta \in \text{In}(\alpha, B) \Rightarrow$
a) $\eta \geq B \wedge \gamma < \lambda_0 \Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(\eta, \gamma) \in C(\alpha, \delta));$
b) $\eta \leq t(B, \gamma) \wedge 0 < \gamma < \lambda_0 \Rightarrow (\gamma(B, \eta) \in C(\gamma(B, \eta), \delta) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta));$
c) $0 < \gamma \Rightarrow \text{In}(\gamma, B) = A(B, \gamma) \cup \text{WF}^B \gamma.$

Anmerkung: Die Behauptung 5.1.c wurde von ACZEL in [1] als Theorem 3 formuliert. Mit ihr werden wir am Ende des Paragraphen leicht zeigen können, daß für $\gamma = \lambda_0$ und $B = \omega$ $A(B, \gamma) = \emptyset$ ist; das heißt $\text{In}(\lambda_0, \omega) = \text{WF}^\omega(\lambda_0)$, und das bedeutet $\theta(\lambda_0)0 = F^\omega(\lambda_0)0$.

Damit sind die beiden Grenzzahlen der Bezeichnungssysteme gleich groß.

Unser Hauptinteresse gilt also dem Beweis der Aussage 5.1.c. Er wird durch transfinite Induktion nach γ geführt und bietet nur Schwierigkeiten für " $>$ " im Falle $\lim(\gamma)$ und $T(B, \gamma) = B^+$. Hier muß die Behauptung 5.1.b "B(B) ist gut" verwendet werden und für diesen Beweis benötigt man die Aussage 5.1.a

" $\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(B, \gamma) \in C(\alpha, \delta)$ ". Diese Behauptung weist darauf hin, daß trotz der sehr unterschiedlichen Definitionen ein enger Zusammenhang zwischen dem ISLESschen und dem FEFERMANschen System besteht.

$P(B, \gamma)$ wurde simultan mit $P'(B, \gamma)$ und $P''(B, \gamma)$ definiert; d.h. die meisten folgenden Sätze werden nur deshalb bewiesen, damit der Beweis dieser ersten Behauptung des Hauptsatzes geführt werden kann.

Im folgenden setzen wir immer voraus:

$$\gamma \in B(B) \wedge \gamma \leq \alpha \wedge \delta \in \text{In}(\alpha, B).$$

Wir benötigen die folgenden Abkürzungen:

5.2. Abkürzungen:

- a) $Ih(\gamma)$ sei die Aussage, daß der Hauptsatz für alle $\xi < \gamma$ bereits bewiesen sei;
 b) $IH(\gamma) = Ih(\gamma+1)$;
 c) $IB(\gamma)$ sei die Aussage, daß $Ih(\gamma)$ und für γ 5.1.a,b bereits bewiesen seien.

5.3. Lemma:

$IH(\gamma) \wedge \xi \in A(B, \gamma) \Rightarrow B < \xi < F^B_{\gamma 0} \wedge \gamma \notin C(\gamma, \xi)$.

Beweis durch transfinite Induktion nach γ :

a) $A(B, 0) = \emptyset$; (4.12.a)

b) $\gamma = \gamma_1 + 1 \wedge \xi \in A(B, \gamma)$:

$\Rightarrow \xi \in A(B, \gamma_1) \vee (\xi = F^B_{\gamma_1 0} \wedge \gamma_1 \notin C(\gamma_1, \xi))$ (4.12.b,c)

$\Rightarrow B < \xi = F^B_{\gamma_1 0} \wedge \gamma_1 \notin C(\gamma_1, \xi) \wedge \xi \in In(\gamma_1, B)$

(I.V., $IH(\gamma)$:5.1.c)

$\Rightarrow B < \xi < F^B_{\gamma 0} \wedge \gamma \notin C(\gamma, \xi)$

(1.9.c, 4.6.b)

c) $\lim(\gamma) \wedge t(B, \gamma) < B^+ \wedge \xi \in A(B, \gamma)$:

$\Rightarrow \xi \in A(B, \gamma(B, \eta))$ für ein $\eta < t(B, \gamma) < B^+$ (4.12.d, 4.16.a)

$\Rightarrow B < \xi < F^B_{\gamma(B, \eta) 0} \wedge \gamma(B, \eta) \notin C(\gamma(B, \eta), \xi)$ (I.V.)

$\Rightarrow B < \xi < F^B_{\gamma 0} \wedge \gamma \notin C(\gamma, \xi)$; (1.9.d, 4.17.)

d) $\lim(\gamma) \wedge t(B, \gamma) = B^+ \wedge \xi \in A(B, \gamma)$:

$\Rightarrow \xi \in A(B, \gamma(B, \eta))$ für ein $\eta < \xi < B^+$ (4.13.c)

$\Rightarrow \gamma(B, \eta) \notin C(\gamma(B, \eta), \xi) \wedge \eta \in C(\eta, \xi)$ (I.V., 3.2.)

$\Rightarrow \gamma(B, 0) \notin C(\gamma(B, 0), \xi)$ ($IH(\gamma)$:5.1.b)

$\Rightarrow P(B, \gamma(B, 0)) \notin C(\gamma(B, 0), \xi) \wedge \gamma \notin C(\gamma, \xi)$ ($IH(\gamma)$:5.1.a,b)

$\Rightarrow B < \xi \leq P(B, \gamma(B, 0))$ (3.2.)

$\leq F^B_{\gamma(B, 0) 0} < F^B_{\gamma 0}$ (2.13., 1.9.f,e)

5.4. Lemma: $IH(\gamma) \wedge 0 < \xi \leq \gamma < \Lambda 0 \Rightarrow$

a)
$$F^B_{\xi} \eta = \begin{cases} \theta \xi \eta & \text{wenn } B = \omega \wedge \mu(\xi) = 0; \\ \theta \xi(B+1+\eta) & \text{wenn } B \in K \wedge \mu(\xi) \leq B; \\ \theta \xi(\mu(\xi)+\eta) & \text{wenn } B < \mu(\xi) < B^+ \wedge \xi \in C(\xi, F^B_{\xi} 0); \\ \theta \xi(\eta_1+\eta) & \text{wenn } B \leq \eta_1+1 = \mu(\xi) < B^+ \wedge \\ & \wedge \xi \notin C(\xi, F^B_{\xi} 0); \end{cases}$$

b) $\theta \xi \eta \leq F^B_{\xi} \eta$;

c) $\xi \in C(\xi, F^B_{\xi} 1)$;

d) $NF(\gamma, \beta, \tau) = F^{\beta} \xi \eta \wedge \tau \in PB(\gamma, \beta) \wedge (0 < \eta \vee \xi \in C(\xi, F^{\beta} \xi 0))$
 $\Rightarrow \tau$ in Normalform bezüglich θ .

Beweis: a) Beh. mit IH(γ):5.1.c und 5.3.;

b) Beh. mit 5.4.a;

c) Beh. mit 4.19.b und IH(γ):5.1.a;

d) $\eta < \tau \wedge \xi < \tau$ (4.4.d)

$\Rightarrow \tau = \theta \xi \eta_1 \wedge \eta_1 < \tau \wedge \xi \in C(\xi, \tau)$ (5.4.a,c,3.6.g,3.3.b)

5.5. Lemma:

$IH(\beta) \wedge NF(\gamma, \beta, \tau) = F^{\beta} \xi \eta \Rightarrow \beta \wedge \tau \in PB(\gamma, \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\tau \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \delta)).$

Beweis: $F^{\beta} \xi \eta = \theta \xi \eta_1 \wedge \xi < \tau \leq \alpha$ (5.4.c,4.4.d)

" $\Leftarrow$ " $\{\xi, \eta\} \subset C(\alpha, \delta) \wedge \delta \in In(\alpha, \beta):$

$\Rightarrow \{\beta, \xi, \mu(\xi), \eta_2, \eta\} \subset C(\alpha, \delta)$ wenn $\eta_2 + 1 = \mu(\xi)$

(3.2.,3.20.c,3.17.a)

$\Rightarrow \tau = \theta \xi \eta_1 \in C(\alpha, \delta)$

(5.4.a,3.15.a,b)

" $\Rightarrow$ " $\tau \in C(\alpha, \delta) \Rightarrow \eta \in C(\alpha, \delta)$

(3.14.a,b)

$\tau \in PB(\gamma, \beta) \Rightarrow \tau \leq \beta^+$

(2.17.)

$\Rightarrow \tau < \delta \wedge F^{\beta} \xi (\eta + 1) \leq \delta$

(3.9.b, IH(γ):5.1.c,3.3.a)

$\Rightarrow \xi \in C(\xi, F^{\beta} \xi 1) \subset C(\alpha, \delta)$

(5.4.c,3.3.)

5.6. Lemma:

$Ih(\gamma) \wedge \tau \in PB(\gamma, \beta) \subset B(\beta, \gamma) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\tau \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \tau'(\beta, \tau) \subset C(\alpha, \delta)).$

Beweis durch Fallunterscheidung nach der Definition 2.7.:

a) $\gamma \leq \beta: \tau \leq P(\beta, \gamma) \leq \gamma \leq \beta$

(4.4.b,2.2.F1)

$\Rightarrow P'(\beta, \tau) = P'(\tau)$

(2.8.a)

$\Rightarrow$ Beh. folgt mit 4.11.;

b) $\beta < \gamma$: Induktion nach $\tau \in B(\beta, \gamma)$:

b1) $\tau \leq \beta$: Beh. folgt wie in a);

b2) $NF(\gamma, \beta, \tau) = F^{\beta} \tau_1 \tau_2 \wedge \tau \in PB(\beta, \gamma)$:

$\Rightarrow P(\beta, \tau_1) \cup \{\tau_2\} < \tau \wedge P(\beta, \tau_1) \cup \{\tau_2\} \subset PB(\beta, \gamma) \subset B(\gamma, \beta) \wedge$
 $\wedge \tau_1 < \tau \leq \alpha$ (2.7.b2,4.3.b2)

(4.4.d)

$\tau \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{\tau_1, \tau_2\} \subset C(\alpha, \delta)$

(5.5.)

$\Leftrightarrow P(\beta, \tau_1) \cup \{\tau_2, \beta\} \subset C(\alpha, \delta)$

(IH(γ):5.1.a,3.2.)

$$\Leftrightarrow P'(\mathbb{B}, P(\mathbb{B}, \tau_1)) \cup P'(\mathbb{B}, \tau_2) \cup P'(\mathbb{B}) \subset C(\alpha, \delta) \quad (\text{I.V.}, 4.11.)$$

$$\Leftrightarrow P'(\mathbb{B}, \tau) \subset C(\alpha, \delta) \quad (2.8.c)$$

$$b3) NF(\gamma, \mathbb{B}, \tau) = \sum_{i=1}^m \mathbb{B}^{\xi_i} \cdot \eta_i \wedge \tau \in PB(\gamma, \mathbb{B}):$$

$$\Rightarrow \{\mathbb{B}^{\xi_1}, \dots, \mathbb{B}^{\xi_m}, \eta_1, \dots, \eta_m\} \subset \tau \wedge$$

$$\wedge \{\mathbb{B}^{\xi_1}, \dots, \mathbb{B}^{\xi_m}, \eta_1, \dots, \eta_m\} \subset PB(\mathbb{B}, \gamma) \subset B(\gamma, \mathbb{B})$$

$$(2.7.b3, 4.3.b3)$$

$$\tau \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{\mathbb{B}^{\xi_1} \cdot \eta_1, \dots, \mathbb{B}^{\xi_m} \cdot \eta_m\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (3.17.a)$$

$$\Leftrightarrow \{\mathbb{B}^{\xi_1}, \dots, \mathbb{B}^{\xi_m}, \eta_1, \dots, \eta_m\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (4.7.)$$

$$\Leftrightarrow \bigcup \{P'(\mathbb{B}, \mathbb{B}^{\xi_i}) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \bigcup \{P'(\eta_i) \mid 1 \leq i \leq m\} \subset C(\alpha, \delta) \quad (\text{I.V.}, 4.11.)$$

$$\Leftrightarrow P'(\mathbb{B}, \tau) \subset C(\alpha, \delta) \quad (2.8.d)$$

5.7. Lemma: $IH(\gamma) \Rightarrow$

$$a) \gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(\mathbb{B}, \gamma) \subset \delta;$$

$$b) \gamma \in C(\gamma, F_{\gamma}^{\mathbb{B}});$$

$$c) P(\mathbb{B}, \gamma) \subset C(\gamma, \delta) \Leftrightarrow P(\mathbb{B}, \gamma+1) \subset C(\gamma+1, \delta).$$

$$\text{Beweis: } a) \gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(\mathbb{B}, \gamma) \subset C(\alpha, \delta) \quad (IH(\gamma):5.1.a)$$

$$\Leftrightarrow P(\mathbb{B}, \gamma) \subset \delta; \quad (4.19.c)$$

$$b) P(\mathbb{B}, \gamma) \subset C(\gamma, F_{\gamma}^{\mathbb{B}}) \quad (4.19.a)$$

$$\Rightarrow \gamma \in C(\gamma, F_{\gamma}^{\mathbb{B}}); \quad (IH(\gamma):5.1.a)$$

$$c) "\Rightarrow" P(\mathbb{B}, \gamma) \subset C(\gamma, \delta) \subset C(\gamma+1, \delta) \wedge \quad (3.3.a)$$

$$\wedge 1 \in C(\gamma+1, \delta) \quad (4.6.a)$$

$$\Rightarrow P(\mathbb{B}, \gamma+1) = P(\mathbb{B}, \gamma) \cup \{1\} \subset C(\gamma+1, \delta) \quad (2.4.b)$$

$$"\Leftarrow" P(\mathbb{B}, \gamma) \not\subset C(\gamma, \delta) \Rightarrow \gamma \notin C(\gamma, \delta) \quad (IH(\gamma):5.1.a)$$

$$\Rightarrow C(\gamma, \delta) = C(\gamma+1, \delta) \quad (3.7.a)$$

$$\Rightarrow P(\mathbb{B}, \gamma+1) = P(\mathbb{B}, \gamma) \cup \{1\} \not\subset C(\gamma, \delta) = C(\gamma+1, \delta) \quad (2.4.b)$$

5.8. Lemma:

$$IH(\gamma) \wedge \gamma \in C(\gamma, SB+1) \Rightarrow P(\mathbb{B}, \gamma) \subset B(\gamma, \mathbb{B}).$$

$$\text{Beweis: } \gamma \leq \mathbb{B}: P(\mathbb{B}, \gamma) \subset \{\xi \mid \xi \leq \gamma\} = B(\gamma, \mathbb{B}) \quad (2.2.P1, 2.7.a)$$

Sei jetzt $\gamma > \mathbb{B}$, dann transfinite Induktion nach γ :

$$a) \gamma = \gamma_1 + 1: \mathbb{B}_2 := \min\{\xi \mid SB+1 \leq \theta \gamma_1 \xi\}$$

$$\Rightarrow \gamma \in C(\gamma, SB+1) = C(\gamma, \theta \gamma_1 \mathbb{B}_2) \quad (3.5., 3.3.b)$$

$$\Rightarrow \gamma_1 \in C(\gamma_1, \theta \gamma_1 \mathbb{B}_2) = C(\gamma_1, SB+1) \quad (4.6.b, 3.5.)$$

$$\Rightarrow P(\mathbb{B}, \gamma_1) \subset B(\gamma_1, \mathbb{B}) \subset B(\gamma, \mathbb{B}) \quad (\text{I.V.}, 2.16.)$$

$$\Rightarrow P(\mathbb{B}, \gamma) = P(\mathbb{B}, \gamma_1) \cup \{1\} \subset B(\gamma, \mathbb{B}) \quad (2.3.b, 2.7.a, b1)$$

b) $\text{lim}(\gamma): \gamma \in C(\gamma, SB+1)$

$$\Rightarrow A(B, \gamma) = \emptyset \wedge \mu(\gamma) \leq B \wedge \quad (5.3., 3.19.)$$

$$\wedge \gamma \in C(\gamma, F^B \gamma o) \quad (3.3.b)$$

Fall 1: $t(B, \gamma) < B^+$:

$$\Rightarrow \emptyset = A(B, \gamma) = \bigcup \{A(B, \gamma(B, \eta)) \mid \eta < t(B, \gamma)\} \quad (4.12.d)$$

$$\Rightarrow A(B, \gamma(B, \eta)+1) \subset A(B, \gamma(B, \eta+1)) = \emptyset \text{ für alle } \eta < t(B, \gamma) \quad (4.14.)$$

$$\Rightarrow \gamma(B, \eta) \in C(\gamma(B, \eta), F^B(\gamma(B, \eta))o) \quad (4.12.c, b)$$

$$\subset C(\gamma(B, \eta), \theta(\gamma(B, \eta))(SB+1)(IH(\gamma):5.1.c, 5.4.a)$$

$$\subset C(\gamma(B, \eta), SB+1) \quad (3.5.)$$

$$\Rightarrow P(B, \gamma(B, \eta)) \subset B(\gamma(B, \eta), B) \text{ für alle } \eta < t(B, \gamma) \text{ (I.V.)}$$

$$\wedge B(\gamma(B, \eta), B) = \{\xi \mid \xi < F^B(\gamma(B, \eta)+1)o\} \quad (2.14.)$$

$$\Rightarrow P(B, \gamma(B, o)) < F^B(\gamma(B, o)+1)o$$

$$\text{außerdem: } \gamma \in C(\gamma, SB+1) \Rightarrow \gamma \in C(\gamma, \theta\gamma(SB+1)) \quad (3.3.b)$$

$$\Rightarrow \gamma \in C(\gamma, F^B \gamma o) \quad (5.4.a, 3.3.b)$$

$$\Rightarrow P(B, \gamma) \subset C(\gamma, F^B \gamma o) \quad (IH(\gamma):5.1.a)$$

$$\Rightarrow D(B, \gamma) \leq P(B, \gamma) < F^B \gamma o \quad (2.2.P2, IH(\gamma):5.1.c, 3.9.b)$$

$$\Rightarrow D(B, \gamma) \leq F^B(\gamma(B, \eta))o < F^B(\gamma(B, \eta)+1)o \text{ für ein } \eta \quad (1.9.d, c)$$

$$\Rightarrow D(B, \gamma) \in B(\gamma(B, \eta), B) \text{ für ein } \eta < t(B, \gamma) \quad (2.14.)$$

$$\Rightarrow P(B, \gamma) = P(B, \gamma(B, o)) \cup \{D(B, \gamma)\} \quad (2.2.P4)$$

$$\subset B(\gamma(B, \eta), B) \subset B(\gamma, B) \quad (2.16.)$$

Fall 2: $t(B, \gamma) = B^+$:

$$\Rightarrow D(B, \gamma) = \omega \wedge \emptyset = A(B, \gamma) \quad (2.12., 5.3.)$$

$$= \{\eta \mid \eta \in A(B, \gamma(B, \eta)) \wedge \eta < B^+\} \quad (4.12.e)$$

$$\Rightarrow \eta \notin A(B, \gamma(B, \eta)) \text{ für alle } \eta < B^+$$

$$\Rightarrow \eta \notin A(B, \gamma(B, o)+1) \text{ für alle } \eta < B^+ \quad (4.15.)$$

$$\Rightarrow A(B, \gamma(B, o)) = \emptyset \wedge \quad (4.12.b, c)$$

$$\wedge \gamma(B, o) \in C(\gamma(B, o), F^B(\gamma(B, o))o) \quad (4.12.b, c)$$

$$\subset C(\gamma(B, o), \theta(\gamma(B, o))\eta_1) \wedge \eta_1 \in \{o, SB+1\} \quad (5.4.a)$$

$$\subset C(\gamma(B, o), SB+1) \quad (3.5.)$$

$$\Rightarrow P(B, \gamma) = P(B, \gamma(B, o)) \cup \{\omega\} \quad (2.2.P4)$$

$$\subset B(\gamma(B, o), B) \cup \{\omega\} \quad (I.V.)$$

$$\subset B(\gamma, B) \quad (2.16., 2.7.b1)$$

5.9. Lemma:

$IH(\gamma) \Rightarrow (\gamma \in B(B) \Leftrightarrow \gamma \in C(\gamma, B^+ + 1))$.

Beweis durch transfinite Induktion nach γ :

- a) $\gamma = 0$: $\gamma \in B(B) \wedge \gamma \in C(\gamma, B^+ + 1)$ (2.4.a, 3.1.C1)
- b) $\gamma = \eta + 1$: $\gamma \in B(B) \Leftrightarrow \eta \in B(B)$ (1.8.B2)
 $\Leftrightarrow \eta \in C(\eta, B^+ + 1)$ (I.V.)
 $\Leftrightarrow \eta \in C(\eta, \theta\eta(B^+ + 1))$ (3.5.)
 $\Leftrightarrow \gamma \in C(\gamma, \theta\eta(B^+ + 1))$ (4.6.b)
 $\Leftrightarrow \gamma \in C(\gamma, B^+ + 1)$ (3.5.)
- c) $\lim(\gamma) := "$ $\Rightarrow "$ $\gamma \in B(B) \Rightarrow P(B, \gamma) \subset B^+$ (2.17.)
 $\Rightarrow P(B, \gamma) \subset \theta\gamma\eta$ für ein $\eta \in B^+$ (3.10.a, 3.6.d)
 $\Rightarrow P(B, \gamma) \subset C(\gamma, \theta\gamma\eta)$ (3.2.)
 $\Rightarrow \gamma \in C(\gamma, \theta\gamma\eta) \subset C(\gamma, B^+ + 1)$ (IH(γ): 5.1.a, 3.3.b)
 $" \Leftarrow "$ $\gamma \notin B(B) \Rightarrow B \prec q_n \wedge P(q_n, \gamma) \not\subset B(\gamma, q_n)$ (2.4.c)
 $\Rightarrow \gamma \notin C(\gamma, q_n + 1) \supset C(\gamma, B^+ + 1)$ (5.8., 3.3.b)

5.10. Lemma: $IH(\gamma) \Rightarrow$

- a) $\eta \prec \gamma \wedge \forall \xi (\eta \leq \xi \prec \gamma \Rightarrow \xi \notin B(B)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{In}(\gamma, B) = \text{In}(\eta, B)$;
- b) $\lim(\gamma) \wedge \gamma \in B(B) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{In}(\gamma, B) = \bigcap \{ \text{In}(\gamma(B, \eta), B) \mid \eta \prec t(B, \gamma) \}$.

Beweis: a) $\eta \leq \xi \prec \gamma \Rightarrow \xi \notin B(B)$

- $\Rightarrow \xi \notin C(\xi, B^+ + 1)$ (5.9.)
 $\Rightarrow \xi \notin C(\eta, \theta\eta\tau)$ für alle $\tau \in B^+$ (3.3.)
 $\Rightarrow \theta\gamma\tau \neq \theta\eta\tau$ für alle $\tau \in B^+$ (3.7.a)
 $\Rightarrow \text{In}(\gamma, B) = \text{In}(\eta, B)$ (4.10.)
- b) $\gamma_1 := \sup\{\gamma(B, \eta) \mid \eta \prec t(B, \gamma)\}$
 $\Rightarrow \forall \xi (\gamma_1 \leq \xi \prec \gamma \Rightarrow \xi \notin B(B))$ (1.8.b)
 $\Rightarrow \text{In}(\gamma, B) = \text{In}(\gamma_1, B)$ (5.10.a)
 $= \bigcap \{ \text{In}(\gamma(B, \eta), B) \mid \eta \prec t(B, \gamma) \}$ (3.10.c, 3.3.a)

Anmerkung: Dieses Lemma zeigt deutlich den Unterschied zwischen der Definition der $\theta\gamma$ und der $F^\beta\gamma$.

$\theta\gamma$ wird für alle $\gamma \in \text{ON}$ definiert, aber es kann vorkommen, daß in einer Zahlenklasse der Stufe B $\theta\gamma$ sich

für γ aus einem Intervall von γ_1 bis γ_2 nicht ändern ($\text{In}(\gamma_1, B) = \text{In}(\gamma_2, B)$). Definiert man $\mu'(\gamma, B) := \min\{\xi \mid \gamma < \xi \wedge \text{In}(\gamma, B) \neq \text{In}(\xi, B)\}$ so ist $\mu'(\gamma, B)$ nach 3.10.c eine Nachfolgerzahl ($\mu'(\gamma, B) = \mu''(\gamma, B) + 1$); das heißt: das Intervall, indem sich θ_γ auf der Stufe B nicht verändert, hat das Maximum $\mu''(\gamma, B)$.

Die F^β_γ werden nur für $\gamma \in B(B)$ definiert und für $\gamma_1 \neq \gamma_2$ und $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subset B(B)$ gilt $WF^\beta_\gamma \neq WF^\beta_{\gamma_2}$; außerdem folgt aus 5.10.a und der Definition von $\mu'(\gamma, B)$ und $\mu''(\gamma, B)$, daß für alle $\gamma < \lambda_0$ gilt $\mu''(\gamma, B) \in B(B)$.

Folglich gibt es auf der Stufe B bis λ_0 genauso viele verschiedene θ -Funktionen wie F^β -Funktionen: es werden keine "überflüssigen" F^β -Funktionen definiert (mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$ und $WF^\beta_\gamma \neq WF^\beta_{\gamma_2}$), dafür benötigt man die komplizierte Definition der $B(B)$.

Hiermit sieht man, daß die F^β_γ -Funktionen ähnlich zu den θ_γ -Funktionen sind, die BUCHHOLZ in [7] definiert. Allerdings sind die θ_γ -Funktionen keine Normalfunktionen. Sei $B \in K_\omega$ und setzt man

$W(\gamma, B) = \{\delta \mid B < \delta < B^+ \wedge \exists \eta (\delta \in_{N^*} \theta_\eta) \text{ und sei } \overline{W(\gamma, B)} \text{ der topologische Abschluß von } W(\gamma, B) \text{ ausgenommen } B^+, \text{ so gilt für } \mu(\gamma) \leq B^+ : WF^\beta_\gamma = \overline{W(\gamma, B)} \text{ wenn } \gamma \in C(\gamma, F^\beta_\gamma 0);$
 $WF^\beta_\gamma \setminus \{F^\beta_\gamma 0\} = \overline{W(\gamma, B)} \text{ wenn } \gamma \notin C(\gamma, F^\beta_\gamma 0).$

Für $\mu(\gamma) > B^+$ ist WF^β_γ nicht definiert und $\overline{W(\gamma, B)} = \emptyset$.

Mit diesen Lemmata können wir den Hauptsatz beweisen:

Hauptsatz:

- $\gamma \in B(B) \wedge \gamma \leq \alpha \wedge \delta \in \text{In}(\alpha, B) \Rightarrow$
a) $\eta \geq B \wedge \gamma < \lambda_0 \Rightarrow (\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(\eta, \gamma) \subset C(\alpha, \delta));$
b) $\eta \leq t(B, \gamma) \wedge 0 < \gamma < \lambda_0 \Rightarrow (\gamma(B, \eta) \in C(\gamma(B, \eta), \delta) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta));$
c) $0 < \gamma \Rightarrow \text{In}(\gamma, B) = A(B, \gamma) \cup WF^\beta_\gamma.$

Beweis durch simultane transfinite Induktion nach γ :

a1) $\gamma = 0$: $\gamma \in C(\alpha, \delta) \wedge P(\eta, \gamma) = \{0\} \subset C(\alpha, \delta)$

(3.1.C1, 2.4.a)

a2) $\gamma = \xi + 1$:

$\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{\xi, 1\} \subset C(\alpha, \delta)$ (3.17.a)

$\Leftrightarrow P(\eta, \xi) \cup \{1\} \subset C(\alpha, \delta)$ (I.V.)

$\Leftrightarrow P(\eta, \gamma) \subset C(\alpha, \delta)$ (2.4.b)

a3) $\lim(\gamma) \wedge \Sigma(\gamma) = \langle q_1, \dots, q_n \rangle \wedge q_0 := \Lambda 0$

$\wedge q_{i+1} \leq \eta < q_i$ für ein $i \in \{0, \dots, n-1\}$;

Nebeninduktion nach i :

a31) $i = 0$: $P(\eta, \gamma) = P'(\gamma)$ (2.4.c1)

Beh. folgt mit 4.11.

a32) $i > 0 \wedge q_{i+1} \leq \eta < q_i \wedge P(q_i, \gamma) \subset B(\gamma, q_i)$:

$\gamma \in C(\alpha, \delta) \Leftrightarrow P(q_i, \gamma) \subset C(\alpha, \delta)$ (N.I.V.)

$\Leftrightarrow P'(q_i, P(q_i, \gamma)) \subset C(\alpha, \delta)$ (5.6.)

$\Leftrightarrow P(\eta, \gamma) \subset C(\alpha, \delta)$ (2.4.c2)

b) Nebeninduktion nach η :

b1) $\eta = 0$: $\gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge 0 \in C(0, \delta)$ (3.1.C1)

b2) $\eta = \xi + 1$: $\gamma(B, \xi) < \gamma(B, \eta) < \gamma$ (1.8.B3b)

$\gamma(B, \eta) \in C(\gamma(B, \eta), \delta) \Leftrightarrow P(B, \gamma(B, \eta)) \subset C(\gamma(B, \eta), \delta)$ (5.1.a)

$\Leftrightarrow P(B, \gamma(B, \eta)) < \delta$ (4.19.c)

$\Leftrightarrow P(B, \gamma(B, \xi)) < \delta$ (2.2.P5, 4.10.)

$\Leftrightarrow P(B, \gamma(B, \xi)) \subset C(\gamma(B, \xi), \delta)$ (4.19.c)

$\Leftrightarrow \gamma(B, \xi) \in C(\gamma(B, \xi), \delta)$ (5.1.a)

$\Leftrightarrow \gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge \xi \in C(\xi, \delta)$ (N.I.V.)

$\Leftrightarrow \gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta)$ (4.6.b)

b3) $\lim(\eta) \wedge \eta < t(B, \gamma)$: $\gamma(B, \eta) < \gamma \wedge \lim(\gamma(B, \eta)) \wedge$

$\wedge \gamma(B, \eta) = \gamma(B, \eta)(B, \eta) \wedge t(B, \gamma(B, \eta)) = \eta$ (1.8.B3b)

$\gamma(B, \eta) \in C(\gamma(B, \eta), \delta) \Leftrightarrow$

$\gamma(B, \eta)(B, 0) \in C(\gamma(B, \eta)(B, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta)$ (I.V.)

$\Leftrightarrow \gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta)$ (1.8.B3d)

b4) $\lim(\eta) \wedge \eta = t(B, \gamma)$: $\gamma(B, \eta) = \gamma$ (1.8.B3b)

$\gamma \in C(\gamma, \delta) \Leftrightarrow P(B, \gamma) \subset C(\gamma, \delta)$ (5.1.a)

$\Leftrightarrow P(B, \gamma) < \delta$ (4.19.c)

$$\Leftrightarrow P(B, \gamma(B, 0)) \cup \{D(B, \gamma)\} \leq \delta \quad (2.2.P4)$$

$$\Leftrightarrow P(B, \gamma(B, 0)) \subset C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta) \quad (4.19.c, 4.18.)$$

$$\Leftrightarrow \gamma(B, 0) \in C(\gamma(B, 0), \delta) \wedge \eta \in C(\eta, \delta) \quad (5.1.a)$$

c1) $\gamma = 1$:

$$\text{In}(1, B) = \{\xi \mid B \leq \xi \leq B^+ \wedge \omega^\xi = \xi\} \quad (4.10., 3.10.b)$$

$$= \{\xi \mid B \leq \xi \leq B^+ \wedge B^\xi = \xi\} \quad (4.9.)$$

$$= A(B, 1) \cup \text{WF}^{B, 1} \quad (4.12.a, b, 1.9.c)$$

c2) $\gamma = \xi + 1$: " $\subset$ "

$$\text{In}(\gamma, B) = \{\theta \xi \eta \mid B \leq \eta \leq B^+ \wedge (\xi \notin C(\xi, \theta \xi \eta) \vee \theta \xi \eta = \eta)\} \quad (4.10., 3.10.b)$$

$$\text{In}(\gamma, B) \subset \text{In}(\xi, B) = A(B, \xi) \cup \text{WF}^{B, \xi} \quad (3.3.a, \text{I.V.})$$

$$\delta \in \text{In}(\gamma, B) \Rightarrow \delta \in A(B, \xi) \vee (\delta = F^B \xi \circ \wedge \xi \notin C(\xi, \delta)) \vee \\ \vee (F^B \xi \eta = \delta = \theta \xi \delta) \quad (5.7.b)$$

$$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma) \vee \quad (4.12.c)$$

$$\delta = \begin{cases} \eta & \text{wenn } B = \omega \wedge \mu(\xi) = 0 \\ B+1+\eta & \text{wenn } \mu(\xi) \leq B \in K \\ \mu(\xi) + \eta & \text{wenn } B < \mu(\xi) < B^+ \wedge \xi \in C(\xi, F^B \xi \circ) \\ \eta_1 + \eta & \text{wenn } B < \eta_1 + 1 = \mu(\xi) < B^+ \wedge \xi \notin C(\xi, F^B \xi \circ) \end{cases} \quad (5.4.a)$$

$$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma) \vee \delta = F^B \xi \delta \vee (\delta = F^B \xi \circ \wedge \xi \notin C(\xi, \delta)) \quad (3.6.g)$$

$$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma) \cup \text{WF}^{B, \gamma} \quad (4.12.c, 1.9.c)$$

$$" \supset " \delta \in A(B, \gamma) \cup \text{WF}^{B, \gamma}$$

$$\Rightarrow \delta \in A(B, \xi) \vee (\delta = F^B \xi \circ \wedge \xi \notin C(\xi, \delta)) \vee \delta = F^B \xi \delta \quad (4.12.c, 1.9.c)$$

$$\Rightarrow \delta \in \text{In}(\xi, B) \wedge \quad (\text{I.V.})$$

$$\wedge (\xi \notin C(\xi, \delta)) \vee \delta \leq \theta \xi \delta \leq F^B \xi \delta = \delta \quad (5.4.b)$$

$$\Rightarrow \delta \in \text{In}(\gamma, B) \quad (3.10.b)$$

c3) $\lim(\gamma) \wedge t(B, \gamma) \leq B^+$:

$$" \subset " \delta \in \text{In}(\gamma, B) = \bigcap \{\text{In}(\gamma(B, \eta), B) \mid \eta < t(B, \gamma)\} \quad (5.10.b)$$

$$= \bigcap \{A(B, \gamma(B, \eta)) \cup \text{WF}^{B, \gamma(B, \eta)} \mid \eta < t(B, \gamma)\} \quad (\text{I.V.})$$

Fall 1: $\delta \in A(B, \gamma(B, \eta))$ für ein $\eta < t(B, \gamma)$:

$$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma) \quad (4.12.d)$$

Fall 2: $\delta \in \text{WF}^{B, \gamma(B, \eta)}$ für alle $\eta < t(B, \gamma)$:

$$\Rightarrow \delta \in \text{WF}^{B, \gamma} \quad (1.9.d)$$

$$" \supset " \delta \in A(B, \gamma) \cup \text{WF}^{B, \gamma} \Rightarrow$$

$$\delta \in \bigcup \{A(B, \gamma(B, \eta)) \mid \eta < t(B, \gamma)\} \cup \bigcap \{\text{WF}^{B, \gamma(B, \eta)} \mid \eta < t(B, \gamma)\} \quad (4.12.d, 1.9.d)$$

Fall 1: $\delta \in A(B, \gamma(B, \eta))$ für ein $\eta < t(B, \gamma)$:
 $\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma(B, \xi))$ für alle $\eta \leq \xi < t(B, \gamma)$ (4.15.)

$\Rightarrow \delta \in \bigcap \{A(B, \gamma(B, \xi)) \mid \eta \leq \xi < t(B, \gamma)\}$

Fall 2: $\delta \in WF^B(\gamma(B, \eta))$ für alle $\eta < t(B, \gamma)$:

$\Rightarrow \delta \in \bigcap \{WF^B(\gamma(B, \eta)) \mid \eta < t(B, \gamma)\}$

in beiden Fällen gilt:

$\delta \in \bigcap \{A(B, \gamma(B, \xi)) \cup WF^B(\gamma(B, \xi)) \mid \eta \leq \xi < t(B, \gamma)\}$ (1.9.f, d)

$= \bigcap \{In(\gamma(B, \xi), B) \mid \eta \leq \xi < t(B, \gamma)\}$ (I.V.)

$= In(\gamma, B)$ (5.10.b)

c4) $\lim(\gamma) \wedge t(B, \gamma) = B^+$:

" $\subset$ " $\delta \in In(\gamma, B) \subset In(\gamma(B, \delta), B)$ (3.3.a)

$= A(B, \gamma(B, \delta)) \cup WF^B(\gamma(B, \delta))$ (I.V.)

$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma(B, \delta)) \vee \delta \in F^B(\gamma(B, \delta))_0$ (4.1.b)

$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma) \cup WF^B \gamma$ (4.12.e, 1.9.e)

" $\supset$ " $\delta \in A(B, \gamma) \cup WF^B \gamma$:

$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma(B, \delta)) \vee \delta \in F^B(\gamma(B, \delta))_0$ (4.12.e, 1.9.e)

$\Rightarrow \delta \in In(\gamma(B, \delta), B) \subset In(\delta, B)$ (I.V., 3.3.a)

$\Rightarrow \delta \notin C(\delta, \delta) \Rightarrow \gamma(B, \delta) \notin C(\gamma(B, \delta), \delta)$ (3.9.b, 5.1.b)

$\Rightarrow \delta \in A(B, \gamma(B, \delta)+1)$ (4.12.b, c)

$\subset \bigcap \{A(B, \gamma(B, \eta)) \mid \delta \leq \eta < t(B, \gamma)\}$ (4.15.)

$\subset \bigcap \{In(\gamma(B, \eta), B) \mid \delta \leq \eta < t(B, \gamma)\}$ (I.V.)

$= In(\gamma, B)$ (5.10.b)

Anmerkung:

Aus dem Beweis der letzten Aussage des Hauptsatzes kann man folgende Beziehung zwischen $\theta\gamma$ und $F^B\gamma$ feststellen: Nach 3.10.b gilt

$$In(\gamma+1, B) = \{\theta\gamma\eta \mid B < \eta < B^+ \wedge \gamma \notin C(\gamma, \theta\gamma\eta)\} \cup \\ \cup \{\theta\gamma\eta \mid B < \eta < B^+ \wedge \gamma \in C(\gamma, \theta\gamma\eta) \wedge \theta\gamma\eta = \eta\}.$$

Die erste Menge entspricht $A(B, \gamma+1)$, die zweite Menge entspricht $WF^B(\gamma+1)$. Ist die zweite Menge leer, so ist weder γ noch $\gamma+1$ aus $B(B)$ und damit sind $A(B, \gamma+1)$ und $WF^B(\gamma+1)$ nicht definiert.

5.11. Lemma: $\beta \in K_\omega$:

- a) $\lambda o(\beta, n) \in C(o, o)$;
- b) $A(\beta, \lambda o(\beta, n)) = \emptyset$;
- c) $A(\beta, \lambda o) = \emptyset$.

Beweis: a) $\lambda o(\beta, n) = h'(\beta, \lambda o)n = h'(\lambda o)n$ (4.16.a, 2.4.c1)
vollständige Induktion nach n:

- $n = o$: $o \in C(o, o)$ (3.1.C1)
- $\Rightarrow h'(\lambda o)o = go \in C(o, o)$ (2.3.f, 3.15.b)
- $n+1$: $o \in C(o, o) \wedge h'(\lambda o)n \in C(o, o)$ (3.1.C1, I.V.)
- $\Rightarrow h'(\lambda o)(n+1) = g(h'(\lambda o)n)o \in C(o, o)$ (2.3.f, 3.15.b)
- b) $\lambda o(\beta, n) \in C(o, o) \subset C(o, \beta+1)$ (5.12.a, 3.3.a)
- $\Rightarrow A(\beta, \lambda o(\beta, n)) = \emptyset$ (5.3.)
- c) $A(\beta, \lambda o) = \bigcup \{A(\beta, \lambda o(\beta, n)) \mid n < \omega\} = \emptyset$ (4.12.b)

5.12. ACZELsche Vermutung:

$$\theta(\lambda o)o = F^\omega(\lambda o)o$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \text{In}(\lambda o, \omega) &= A(\omega, \lambda o) \cup \text{WF}^\omega(\lambda o) & (5.1.c) \\ &= \text{WF}^\omega(\lambda o) & (5.11.c) \end{aligned}$$

Anmerkung:

Damit ist gezeigt, daß die beiden Ordinalzahlssysteme den gleichen Ordinalzahlabschnitt bis $\theta(\lambda o)o$ bzw. $F^\omega(\lambda o)o$ bezeichnen.

Literaturverzeichnis

- 1 ACZEL, Peter: A new approach to the BACHMANN method for describing countable ordinals (unveröffentlicht)
- 2 BACHMANN, Heinz: Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordinalzahlen. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 95 (1950)
- 3 BACHMANN, Heinz: Transfinite Zahlen, Springer, Berlin (1967)
- 4 BRIDGE, Jane: Some problems in mathematical logic, Dissertation, Oxford (1972)
- 5 BRIDGE, Jane: A simplification of the BACHMANN method for generating large countable ordinals, Journal of symbolic logic 40-2 (1975)
- 6 BUCHHOLZ, Wilfried: Rekursive Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen auf der Grundlage der FEFERMAN-ACZELschen Normalfunktionen β_α , Dissertation, München (1974)
- 7 BUCHHOLZ, Wilfried: Normalfunktionen und konstruktive Systeme von Ordinalzahlen, Springer Lecture Notes 500 Berlin (1975)
- 8 GENTZEN, Gerhard: Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Forsch.z.Log.u.Grundl.d.exak.Wissenschaften, Neue Serie 4, Leipzig (1938)
- 9 ISLES, David: Regular ordinals and normal forms, Intuitionism and Proof Theory, North Holland (1970)
- 10 OELLRICH, Falko : Ein Auszeichnungssystem für Ordinalzahlen nach David ISLES, Diplomarbeit, Hannover
- 11 SCHÜTTE, Kurt: Einführung der Normalfunktionen β_α ohne Auswahlaxiom und ohne Regularitätsbedingung, Arch.Math.Log.u.Grundl. 17 (1976)

Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole

3	α^+	10	$h'(\beta, \gamma)$
5	$\alpha \leq M$	11	$h''(\beta, \gamma)$
19	$A(\beta, \gamma)$	12	$\text{In}(\alpha)$
25	$\text{IB}(\gamma)$	19	$\text{In}(\alpha, \beta)$
8	$B(\beta)$	2	K, K_0, K_ω
9	$B(\gamma, \beta)$	3	$\wedge$
10	$B'(\gamma, \beta)$	14	$\mu(\alpha)$
11	$B''(\gamma, \beta)$	9	$\text{NF}(\alpha, \beta, \gamma)$
4, 5	$\mathcal{L}(\beta)$	13	$\gamma_{\overline{\text{NF}}} \dots$
6	$\mathcal{L}(\wedge_0)$	1	ON
12	$C(\alpha, \beta)$	5	$P(\gamma)$
5	$D(\gamma)$	6	$P'(\gamma)$
6	$D'(\gamma)$	8	$P(\beta, \gamma)$
8	$D(\beta, \gamma)$	10	$P'(\beta, \gamma)$
10	$D'(\beta, \gamma)$	11	$P''(\beta, \gamma)$
11	$D''(\beta, \gamma)$	16	$\text{PB}(\beta, \gamma)$
9	F^β	3	$S\alpha, s\alpha$
2	f^n, f'	8	$\Sigma(\alpha)$
22	gut	6	$T'(\gamma)$
21	$\gamma(\beta, \eta)$	8	$T(\beta, \gamma)$
3	g	10	$T'(\beta, \gamma)$
25	$\text{Ih}(\gamma), \text{IH}(\gamma)$	11	$T''(\beta, \gamma)$
4	$h(\gamma)$	21	$t(\beta, \gamma)$
6	$h'(\gamma)$	4	$\text{Th}\gamma, \tau_\gamma$
8	$h(\beta, \gamma)$	12	$\theta\alpha$

Lebenslauf

- 1948 Am 3.9. wurde ich in Heidelberg geboren.
Mutter: Otilie Aly, geborene Schneider, Hausfrau
Vater: Ernst Aly, Verleger
- 1955 Eintritt in die Volksschule
- 1956 Umzug nach Leonberg/ Baden-Württemberg
Besuch der dortigen Volksschule
- 1959 Eintritt in das Albert-Schweitzer-Gymnasium,
Leonberg
- 1962 Umzug nach Gräfelfing/ Bayern
Besuch des dortigen Kurt-Huber-Gymnasiums
- 1965/6 Besuch der Friends 'Central School, Philadelphia,
USA
- 1968 Abitur am Kurt-Huber-Gymnasium
Beginn meines Mathematikstudiums an der Universi-
tät München
- 1974 Diplomprüfung
Seit der Zeit arbeite ich an meiner Dissertation
und studiere Pädagogik.

